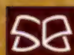
Shibian Hanshu

# 实变函数（第2版）

张建平　丘京辉◎编



东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

◆江苏省高等学校精品教材建设资助项目◆

◆苏州大学第二批精品教材建设项目◆

# 实变函数（第2版）

Shibian Hanshu

上架建议 数学

ISBN 978-7-5641-4986-4



定价：24.00元

责任编辑：张 烨
责任印制：张文礼
封面设计：毕 真

# 实 变 函 数

（第2版）

张建平　丘京辉　编

东南大学出版社
·南京·

## 内容提要

本书在 $n$ 维欧氏空间中建立 Lebesgue 测度和积分的理论，突出体现实变函数的基本思想。全书包括：集合、点集、Lebesgue 测度、可测函数、Lebesgue 积分、微分与不定积分、$L^p$ 空间共七章。每一小节讲述概念、定理与例题后，均附有精心挑选的配套基本习题，每一章后均附有整整一节的例题选讲，介绍实变函数解题的各种典型方法与重要技巧，每一章后还列出大量的习题供读者去研究与探索。

本书可作为高等院校数学专业的教材，也可供相关专业人员参考。

**图书在版编目(CIP)数据**

实变函数/张建平，丘京辉编. —2 版. —南京：东南大学出版社，2014.7

ISBN 978-7-5641-4986-4

Ⅰ. 实… Ⅱ. ① 张…② 丘… Ⅲ. 实变函数—高等学校—教材 Ⅳ. O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 107030 号

**实变函数(第 2 版)**

出版发行 东南大学出版社
出 版 人 江建中
社　　址 南京市四牌楼 2 号
邮　　编 210096

经　　销 全国各地新华书店
印　　刷 兴化印刷有限责任公司
开　　本 700 mm×1000 mm 1/16
印　　张 10.25
字　　数 201 千字
版　　次 2014 年 7 月第 2 版
印　　次 2014 年 7 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5641-4986-4
定　　价 24.00 元

# 第 2 版前言

《实变函数》第 1 版于 2009 年 5 月出版，由于书中内容深入浅出、结构体系合理，得到众多读者的好评。趁本书再版的机会，我们对原书作了一些修订。主要是纠正了第 1 版中的错漏不当之处，补充了若干例题，个别地方的讲解也有所改变。目的是为了更广地开拓解题视野，并更好地理解抽象理论。

本书正式出版以来，编者收到许多读者的宝贵意见和热情鼓励。苏州大学数学科学学院的侯绳照教授和常熟理工学院数学与统计学院的王见勇教授给予本书高度评价，并结合教学对全书提出了宝贵的修订意见。东南大学出版社的张烨编辑对第 2 版作了认真细致的校勘。编者在此一并表示衷心的感谢！

编者

2014 年 5 月于苏州

# 前　言

大学数学系的学生常常感到“实变函数”难学。的确，“实变函数”概念抽象，内容艰深，习题难解，其独创的思想方法常隐藏在严谨而难懂的论证过程之后，易使初学者感到困惑。但是，“实变函数”又是一门重要的数学基础课程，是进一步学习“实分析”和“泛函分析”的基础，它的概念、理论、论证技巧和思想方法已渗透到数学乃至其他科学的各个分支，成为我们步入现代数学殿堂不可或缺的阶梯。我们长期在苏州大学从事“实变函数”和“实分析”的教学工作，深感需要根据实际情况编写一本内容深入浅出，通俗易懂，而且具有较多解题示范的实变函数教材，以适应一般师范院校、地方性高校的数学系的需要。由于水平有限，编写过程中难免会有缺点、错误和不当之处，诚恳希望专家同行和使用本书的师生提出宝贵意见。同时我们也指出：由于这是一本教材，我们在编写过程中曾参阅了国内外大量的有关教材和文献，这里不再一一列出。

本书的编写和出版得到了苏州大学数学科学学院、苏州大学教务处和教材科的领导与有关同志的大力支持和热情帮助；还得到了“江苏省高等学校精品教材建设项目”和“苏州大学精品教材建设项目”所提供的基金资助。东南大学出版社的张烨、史静编辑也为本书的出版付出了辛勤的劳动。又，研究生贺飞、杨心情、李博和范茜帮助校对了书稿。在此，我们一并表示衷心的感谢！

编者于 2008 年 8 月

# 目　　录

# 1 集 合

集合、映射与基数的理论是学习实变函数不可缺少的准备知识，也是以后学习近现代数学的基本概念之一. 本章我们介绍集合、映射与基数的基本知识.

## 1.1 集合及其运算

**集合**是指具有某种特定性质的对象的全体. 构成集合的对象称为集合的元素. 不含任何元素的集合称为**空集**，记为$\varnothing$.

若$x$为集合$A$的元素，则记为$x\in A$，称为$x$**属于**$A$；若$x$非集合$A$的元素，则记为$x\notin A$，称为$x$**不属于**$A$.

通常用大写字母$A,B,X,Y,\cdots$表示集合，用小写字母$a,b,x,y,\cdots$表示集合中的元素. 表示集合的方法有列举法和描述法. 列举法是列出该集合的所有元素，而描述法是给出该集合元素所特有的性质的刻画.

设集合$A$是方程$x^2-5x+6=0$的根的全体，则可以用列举法表示为$A=\{2,3\}$，也可以用描述法表示为$A=\{x:x^2-5x+6=0\}$.

本书中记自然数集(不含0)为$\mathbf{N}$，整数集为$\mathbf{Z}$，有理数集为$\mathbf{Q}$，实数集为$\mathbf{R}$(或$\mathbf{R}^1$).

**定义 1.1.1** 设有集合$A$与$B$，如果集合$A$的每一个元素都属于集合$B$，则称集合$A$为集合$B$的**子集**，记为$A\subset B$或$B\supset A$，分别读为$A$**包含于**$B$或$B$**包含**$A$.

若$A\subset B$，而$B$中有元素$x\notin A$，则称集合$A$为集合$B$的**真子集**.

空集$\varnothing$为任何集合的子集.

**定义 1.1.2** 如果$A\subset B$且$B\subset A$，则称集合$A$与集合$B$**相等**，记为$A=B$.

**例 1.1.1** $\{x\in\mathbf{R}:-1<x<1\}=\{x\in\mathbf{R}:x^2<1\}$.

若有集合$A,B,C$，可以构造集合族$X=\{A,B,C\}$，这里集合$A,B,C$分别是集合族$X$的元素. 若有一族集合，也可以构造集合族$X=\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，这里$\Lambda$是指标集，对每个$\lambda\in\Lambda$，集合$A_\lambda$是集合族$X$的元素.

若在某个问题中，所考虑的集合皆为$X$的子集，则称$X$为**全集**(或**基本集**).

**定义 1.1.3** 设有集合 $A$ 与 $B$，称集合 $\{x: x\in A$ 或 $x\in B\}$ 为 $A$ 与 $B$ 的**并集**，记作 $A\cup B$；称集合 $\{x: x\in A$ 且 $x\in B\}$ 为 $A$ 与 $B$ 的**交集**，记作 $A\cap B$.

对集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，可分别定义**并集与交集**为

$\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\{x: \exists\lambda\in\Lambda, x\in A_\lambda\}$ 与 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\{x: \forall\lambda\in\Lambda, x\in A_\lambda\}$.

**例 1.1.2** 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的实函数，则有 $\{x\in\mathbf{R}: f(x)>0\}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left\{x\in\mathbf{R}: f(x)>\dfrac{1}{k}\right\}$.

**定义 1.1.4** 设有集合 $A$ 与 $B$，称集合 $\{x: x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 为 $A$ 与 $B$ 的**差集**，记作 $A\backslash B$. 当 $B$ 是 $A$ 的子集时，称 $A\backslash B$ 为集合 $B$ 相对于集合 $A$ 的**补集或余集**. 集合 $B$ 相对于全集 $X$ 的补集简称为集合 $B$ 的补集，记为 $B^c=X\backslash B$.

**定理 1.1.1** 集合运算有如下性质：

(1) 幂等律 $A\cup A=A, A\cap A=A$；

(2) 交换律 $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$；

(3) 结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

(4) 分配律 $A\cap(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda)=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(A\cap B_\lambda), A\cup(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda)=\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}(A\cup B_\lambda)$.

**命题 1.1.2** 设 $X$ 是全集，则有

(1) $A\cup A^c=X, A\cap A^c=\varnothing, X^c=\varnothing, \varnothing^c=X$；

(2) $(A^c)^c=A, A\backslash B=A\cap B^c$；

(3) $A\subset B\Leftrightarrow A^c\supset B^c, A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow A\subset B^c$.

**例 1.1.3** (1) $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\subset B\Leftrightarrow\forall\lambda\in\Lambda, A_\lambda\subset B$；

(2) $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\supset B\Leftrightarrow\forall\lambda\in\Lambda, A_\lambda\supset B$.

**定理 1.1.3(De Morgan 法则)** 设 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是全集 $X$ 上的一个集族，则有

$$(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c=\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c; \tag{1.1}$$

$$(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c=\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c. \tag{1.2}$$

(上两式分别为 (1)、(2).)

**证** (1) $x\in(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c\Leftrightarrow x\notin\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Leftrightarrow\forall\lambda\in\Lambda, x\notin A_\lambda$

$$\Leftrightarrow\forall\lambda\in\Lambda, x\in A_\lambda^c\Leftrightarrow x\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c.$$

(2) 把(1.1)式中的 $A_\lambda$ 换成 $A_\lambda^c$，有 $(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c)^c=\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$，再两边取余集即得.

**定义 1.1.5** 设 $\{A_k\}$ 是一集列，称 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ 为集列 $\{A_k\}$ 的**上限集**，记作 $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_k$；

称$\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$为集列$\{A_k\}$的**下限集**，记作$\varliminf_{k\to\infty}A_k$. 若上限集与下限集相等，则称集列$\{A_k\}$的**极限集**存在并等于上限集或下限集，记为$\lim_{k\to\infty}A_k$.

若集列$\{A_k\}$满足$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_k\subset\cdots$，称为**递增集列**，这时有$\lim_{k\to\infty}A_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$.

若集列$\{A_k\}$满足$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_k\supset\cdots$，称为**递减集列**，这时有$\lim_{k\to\infty}A_k=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$.

**例 1.1.4** 设有集列$\{A_k\}$，证明：

(1) $\varlimsup_{k\to\infty}A_k=\{x:$有无限多个$A_k$含$x\}$；

(2) $\varliminf_{k\to\infty}A_k=\{x:$至多有限多个$A_k$不含$x\}$.

从而有$\varliminf_{k\to\infty}A_k\subset\varlimsup_{k\to\infty}A_k$.

**证** (1) $x\in\varlimsup_{k\to\infty}A_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\Leftrightarrow\forall n$，有$x\in\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$

$\Leftrightarrow\forall n,\exists k\geqslant n$，有$x\in A_k\Leftrightarrow x\in\{x:$有无限多个$A_k$含$x\}$.

(2) $x\in\varliminf_{k\to\infty}A_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k\Leftrightarrow\exists n$，使$x\in\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$

$\Leftrightarrow\exists n$，对$\forall k\geqslant n$，有$x\in A_k\Leftrightarrow x\in\{x:$至多有限多个$A_k$不含$x\}$.

**定义 1.1.6** 设$X,Y$是两个集合，则称$\{(x,y):x\in X,y\in Y\}$为集合$X$与$Y$的**直积集**(或**笛卡儿积**)，记为$X\times Y$. 类似地，可定义$n$个集合$X_1,X_2,\cdots,X_n$的直积集如下：

$$X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_i\in X_i,i=1,2,\cdots,n\}.$$

若$x=(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n)\in X$，称$x_i$为$x$的第$i$个**坐标**. 称集合$X_i$为直积集$X$的第$i$个**坐标集**. 通常把$n$个相同的集合$X$的直积集记为$X^n$.

**例 1.1.5** $\mathbf{N}\times\mathbf{N}=\{(n,m):n,m\in\mathbf{N}\}$.

**例 1.1.6** $\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}$.

## 1.2 映 射

**定义 1.2.1** 设$X,Y$是两个非空集合，若有某个法则$f$，使每个$x\in X$有唯一确定的$y\in Y$与之对应，则称$f$为从$X$到$Y$的**映射**，记为$f:X\to Y$.

对每个$x\in X$，记$Y$中与$x$对应的点$y$为$f(x)$，并称$y$为点$x$在映射$f$下的**象**. 对每个$y\in Y$，如果存在$x\in X$使得$y=f(x)$，则称$x$为点$y$在映射$f$下的

**原象**.

**定义 1.2.2** 若 $A\subset X$，记 $f(A)=\{y\in Y:\exists x\in A, y=f(x)\}$，并称 $f(A)$ 为集 $A$ 在映射 $f$ 下的**象集**. 若 $B\subset Y$，记 $f^{-1}(B)=\{x\in X: f(x)\in B\}$，并称 $f^{-1}(B)$ 为集 $B$ 关于映射 $f$ 的**原象集**.

**定义 1.2.3** 设 $f:X\to Y$ 为映射. 若任意的 $x_1,x_2\in X$ 且 $x_1\neq x_2$，有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 $f$ 是从 $X$ 到 $Y$ 的一个**单射**. 若 $f(X)=Y$，则称 $f$ 是从 $X$ 到 $Y$ 的一个**满射**. 若映射 $f$ 既为单射又为满射，则称 $f$ 是从 $X$ 到 $Y$ 的一个**双射**(或**一一映射**).

**定义 1.2.4** 设 $f:X\to Y$ 是双射，则对任意 $y\in Y$，存在唯一 $x\in X$，使 $y=f(x)$，称这个从 $Y$ 到 $X$ 的对应法则为 $f$ 的**逆映射**，记作 $f^{-1}:Y\to X$.

**命题 1.2.1** 设映射 $f:X\to Y$，则

(1) 对于任意 $A\subset X$，有 $A\subset f^{-1}(f(A))$；

(2) 对于任意 $B\subset Y$，有 $B\supset f(f^{-1}(B))$.

**证** (1) 设 $x\in A$，则 $f(x)\in f(A)$，故 $x\in f^{-1}(f(A))$，所以有 $A\subset f^{-1}(f(A))$.

(2) 设 $y\in f(f^{-1}(B))$，则存在 $x\in f^{-1}(B)$，使 $y=f(x)$，故 $y\in B$，所以有 $B\supset f(f^{-1}(B))$.

**命题 1.2.2** 设映射 $f:X\to Y$，则

(1) $A_1\subset A_2\Rightarrow f(A_1)\subset f(A_2)$，$B_1\subset B_2\Rightarrow f^{-1}(B_1)\subset f^{-1}(B_2)$；

(2) $f(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}f(A_\lambda)$，$f(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)\subset\bigcap_{\lambda\in\Lambda}f(A_\lambda)$；

(3) $f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(B_\lambda)$，$f^{-1}(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda)=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(B_\lambda)$；

(4) $f^{-1}(B^c)=(f^{-1}(B))^c$.

**证** 我们仅给出(4)的证明.

(4) $x\in f^{-1}(B^c)\Leftrightarrow f(x)\in B^c\Leftrightarrow f(x)\notin B\Leftrightarrow x\notin f^{-1}(B)\Leftrightarrow x\in(f^{-1}(B))^c$.

其余的关系式请读者自证，并请举出使上述(2)式中真包含关系成立的例子.

**定义 1.2.5** 设有映射 $f:X\to Y$，$g:Y\to Z$，则称 $h(x)=g[f(x)]$ 所定义的映射 $h:X\to Z$ 为 $g$ 与 $f$ 的**复合映射**，记作 $h=g\circ f$.

**定义 1.2.6** 设 $A\subset X$，映射 $f:X\to Y$，$g:A\to Y$. 若 $f(x)=g(x)(x\in A)$，则称映射 $g$ 为 $f$ 在集合 $A$ 上的**限制**，并记为 $g=f|A$. 此时，也称映射 $f$ 为 $g$ 在 $X$ 上的一个**扩张**(或**延拓**).

**定义 1.2.7** 设 $X$ 为全集，子集 $A\subset X$，则称函数

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A;\\ 0, & x\in X\backslash A.\end{cases}$$

为定义在 $X$ 上的 $A$ 的**特征函数**.

**例 1.2.1** 设 $X$ 为全集,$A$,$B$ 均为 $X$ 的子集,则特征函数有如下性质:

(1) $A\subset B\Leftrightarrow \chi_A(x)\leqslant\chi_B(x)(x\in X)$;

(2) $\chi_{A\cup B}(x)=\chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_{A\cap B}(x)$;

(3) $\chi_{A\cap B}(x)=\chi_A(x)\chi_B(x)$;

(4) $\chi_{A\backslash B}(x)=\chi_A(x)[1-\chi_B(x)]$.

## 1.3 对等与基数

对于有限集来说,我们可以通过计数的方法来判定它含有几个元素,从而确定两个不同的有限集所含元素的多少.但由于每个无限集都含有无限多个元素,故无法通过计数的方法来判定两个不同的无限集谁所含的元素更多些.因此我们要借助双射,来引入两个集合所含有的元素一样多的概念,即所谓“对等”的概念.

**定义 1.3.1** 设有集合 $A$,$B$,若存在一个从 $A$ 到 $B$ 的双射,则称集合 $A$ 与 $B$ **对等**.记作 $A\sim B$.

若存在 $n\in\mathbf{N}$,使 $E\sim\{1,2,\cdots,n\}$,则称 $E$ 为**有限集**,空集 $\varnothing$ 也称为有限集.若集合 $E$ 不是有限集,则称 $E$ 为**无限集**.

**例 1.3.1** $\mathbf{N}\sim\{2n:n\in\mathbf{N}\}$.

**证** 令 $f(n)=2n$,则 $f:\mathbf{N}\to\{2n:n\in\mathbf{N}\}$是双射.

**例 1.3.2** $[0,1]\sim[0,4]$.

**证** 令 $f(t)=4t$,则 $f:[0,1]\to[0,4]$是双射.

**例 1.3.3** $(-1,1)\sim\mathbf{R}^1$.

**证** 令 $f(x)=\tan\dfrac{\pi x}{2}$,则 $f:(-1,1)\to\mathbf{R}^1$ 是双射.

**命题 1.3.1** 设有集族$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$,$\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$,满足

(1) 对 $\forall\lambda\in\Lambda$,有 $A_\lambda\sim B_\lambda$;

(2) 对 $\forall\alpha,\beta\in\Lambda$ 且 $\alpha\neq\beta$,有 $A_\alpha\cap A_\beta=\varnothing$,$B_\alpha\cap B_\beta=\varnothing$.

则 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\sim\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$.

**证**　对每个 $\lambda\in\Lambda$,有 $A_\lambda\sim B_\lambda$,故存在双射 $f_\lambda:A_\lambda\to B_\lambda$. 对 $\forall x\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$,存在唯一的 $\lambda\in\Lambda$,使 $x\in A_\lambda$. 令 $f(x)=f_\lambda(x)$,则可证 $f:\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\to\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$ 是双射.

**命题 1.3.2**　对等关系有如下性质:

(1) 自反性　$A\sim A$;

(2) 对称性　若 $A\sim B$,则 $B\sim A$;

(3) 传递性　若 $A\sim B,B\sim C$,则 $A\sim C$.

**定理 1.3.3(Cantor-Bernstein 定理)**　若集合 $X$ 对等于 $Y$ 的一个子集,集合 $Y$ 对等于 $X$ 的一个子集,那么集合 $X$ 与 $Y$ 对等.

**证**　存在两个单映射 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to X$,记 $Y_0=Y$,令

$$
\begin{aligned}
&X_1=X\setminus g(Y_0), \quad Y_1=Y\setminus f(X_1),\\
&X_2=X\setminus g(Y_1), \quad Y_2=Y\setminus f(X_2),\\
&\cdots \qquad\qquad\qquad \cdots\\
&X_k=X\setminus g(Y_{k-1}), Y_k=Y\setminus f(X_k),\\
&\cdots \qquad\qquad\qquad \cdots
\end{aligned}
$$

再令 $A=\bigcup_{k=1}^{\infty}X_k,B=\bigcap_{k=1}^{\infty}Y_k=\bigcap_{k=0}^{\infty}Y_k$,则有

$$X=A\cup(X\setminus A),Y=B\cup(Y\setminus B) \tag{1.3}$$

因为 $f$ 与 $g$ 为单射,所以有 $A\sim f(A)$以及 $B\sim g(B)$,且有 $g(\bigcap_{k=0}^{\infty}Y_k)=\bigcap_{k=0}^{\infty}g(Y_k)$.

再由 $f(A)=f(\bigcup_{k=1}^{\infty}X_k)=\bigcup_{k=1}^{\infty}f(X_k)=\bigcup_{k=1}^{\infty}(Y\setminus Y_k)=Y\setminus(\bigcap_{k=1}^{\infty}Y_k)=Y\setminus B$,知 $A\sim Y\setminus B$. 以及由 $g(B)=g(\bigcap_{k=0}^{\infty}Y_k)=\bigcap_{k=0}^{\infty}g(Y_k)=\bigcap_{k=0}^{\infty}(X\setminus X_{k+1})=X\setminus(\bigcup_{k=0}^{\infty}X_{k+1})=X\setminus A$,知 $B\sim X\setminus A$.

所以根据命题 1.3.1 及(1.3)式,知 $X\sim Y$.

**推论 1.3.4**　设有集合 $A,B,C$,且有 $A\subset B\subset C$ 及 $A\sim C$,则 $A\sim B\sim C$.

**命题 1.3.5**　任一区间 $I$(开区间、闭区间或半开区间)均与直线 $\mathbf{R}^1$ 对等.

**证**　取开区间$(a,b)\subset I$,则有$(a,b)\subset I\subset\mathbf{R}^1$,且$(a,b)\sim\mathbf{R}^1$,所以 $I\sim\mathbf{R}^1$.

**基数的概念**　集合之间的对等关系"~"是一种等价关系,按照等价关系"~"将集合进行分类,两个集合当且仅当它们对等时属于同一类. 对每一类予以一个记号,称此记号是该类中任一集的**基数**(或**势**). 集合 $E$ 的基数记作$\overline{\overline{E}}$.

有限集的基数为其所含元的个数，空集的基数为 0.

**定义 1.3.2** 设有集合 $A$ 与 $B$，记 $\overline{\overline{A}}=\alpha$，$\overline{\overline{B}}=\beta$，若集合 $A$ 与 $B$ 的一个子集对等，则称 $\alpha$ **不大于** $\beta$，记作 $\alpha\leqslant\beta$（或 $\beta\geqslant\alpha$）；若 $\alpha\leqslant\beta$（或 $\beta\geqslant\alpha$）且 $\alpha\neq\beta$，则称 $\alpha$ **小于** $\beta$，记作 $\alpha<\beta$（或 $\beta>\alpha$）.

现在可以把定理 1.3.3 写作：设有基数 $\alpha,\beta$，若 $\alpha\leqslant\beta$，$\beta\leqslant\alpha$，则 $\alpha=\beta$.

可以证明，对任意两个基数 $\alpha,\beta$，则三个关系式"$\alpha<\beta,\alpha=\beta,\alpha>\beta$"中至多成立一式（证明较易），且至少成立一式（证明较难，见那汤松所著《实变函数论》下册）.

**命题 1.3.6** 设映射 $f:X\to Y$，则

(1) 若 $f$ 为单映射，有 $\overline{\overline{X}}\leqslant\overline{\overline{Y}}$；

(2) 若 $f$ 为满映射，有 $\overline{\overline{X}}\geqslant\overline{\overline{Y}}$.

**证** (1) 若 $f:X\to Y$ 为单映射，则 $f:X\to f(X)$ 为双射，故 $\overline{\overline{X}}=\overline{\overline{f(X)}}\leqslant\overline{\overline{Y}}$.

(2) 若 $f$ 为满映射，对每个 $y\in Y$，从非空集 $f^{-1}(y)$ 中取定一点记作 $g(y)$，则 $g:Y\to X$ 是单映射，于是由(1)知 $\overline{\overline{X}}\geqslant\overline{\overline{Y}}$.

**例 1.3.4** 若 $A\subset B$，且 $A\sim(A\cup C)$，试证明 $B\sim(B\cup C)$.

**证** 由 $A\sim(A\cup C)$，存在双射 $f:A\to A\cup C$. 令

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in A; \\ x, & x\in B\setminus A. \end{cases}$$

则 $g:B\to B\cup C$ 是满射（不一定是单射），故由命题 1.3.6 知 $\overline{\overline{B}}\geqslant\overline{\overline{B\cup C}}$. 另一方面，因为 $B\subset(B\cup C)$，知 $\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{B\cup C}}$. 合之有 $B\sim(B\cup C)$.

**定义 1.3.3** 集合 $E$ 的所有子集所成之集称为 $E$ 的**幂集**，记作 $P(E)$，即

$$P(E)=\{A:A\subset E\}$$

若 $E$ 的基数为 $\lambda$，则 $P(E)$ 的基数通常记为 $2^{\lambda}$.

**定理 1.3.7(无最大基数定理)** 设 $E$ 是任一集合，则 $\overline{\overline{E}}<\overline{\overline{P(E)}}$.

**证** (反证法)若存在双射 $f:E\to P(E)$，令 $A=\{x\in E\mid x\notin f(x)\}$. 由 $A\in P(E)$，以及 $f$ 为满映射，存在 $y\in E$，使 $f(y)=A$.

(1) 若 $y\in A$，则由 $A$ 的定义，有 $y\notin f(y)=A$，得矛盾.

(2) 若 $y\notin A$，则由 $A$ 的定义，有 $y\in f(y)=A$，也得矛盾.

从而可得 $E$ 与 $P(E)$ 不对等. 另外，易知 $\overline{\overline{E}}\leqslant\overline{\overline{P(E)}}$，所以 $\overline{\overline{E}}<\overline{\overline{P(E)}}$.

## 1.4 可数集

**定义 1.4.1** 自然数集 $\mathbf{N}$ 的基数记作 $\aleph_0$（读作“阿列夫零”），若 $A\sim\mathbf{N}$，则称 $A$ 为**可数集**. 有限集与可数集统称为**至多可数集**，若无限集 $E$ 不是可数集，则称 $E$ 为**不可数集**.

集合 $A$ 为可数集当且仅当 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots\}$，即 $A$ 中的元可以用自然数来编号.

**例 1.4.1** 集合 $\{2n:n\in\mathbf{N}\}$ 与 $\{n^3:n\in\mathbf{N}\}$ 都是可数集.

**例 1.4.2** 整数集 $\mathbf{Z}$ 是可数集，因为 $\mathbf{Z}=\{0,1,-1,2,-2,3,-3,\cdots\}$.

**定理 1.4.1** 任一无限集 $E$ 必含一个可数子集.

**证** 取 $x_1\in E$，因为 $E\setminus\{x_1\}\neq\varnothing$，可以取 $x_2\in E\setminus\{x_1\}$；若已取 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，因为 $E\setminus\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\neq\varnothing$，可以取 $x_{n+1}\in E\setminus\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，于是得到集合

$$A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}.$$

它即为无限集 $E$ 的一个可数子集.

上述定理说明：在无限集的基数中，最小的基数是 $\aleph_0$.

**例 1.4.3** 设 $A$ 是有限集，$B$ 是可数集，则 $A\cup B$ 是可数集.

**证** 设 $A\setminus B=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$B=\{y_1,y_2,\cdots,y_m,\cdots\}$，则

$$A\cup B=(A\setminus B)\cup B=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m,\cdots\}$$

所以 $A\cup B$ 是可数集.

**定理 1.4.2** $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 是可数集.

**证** 对 $x=(n,m)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}$，令 $f(x)=2^n3^m$，则 $f:\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 是一个单射，所以有 $\overline{\overline{\mathbf{N}\times\mathbf{N}}}\leqslant\overline{\overline{\mathbf{N}}}$. 又显然有 $\overline{\overline{\mathbf{N}\times\mathbf{N}}}\geqslant\overline{\overline{\mathbf{N}}}$，所以 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}\sim\mathbf{N}$.

不难知道：若 $A,B$ 是可数集，则直积集 $A\times B$ 也是可数集. 一般地，用归纳法可以证明：若每个 $E_k(k=1,2,3,\cdots,n)$ 是可数集，则直积集 $E_1\times E_2\times\cdots\times E_n$ 也是可数集.

**定理 1.4.3** 若每个 $A_n(n=1,2,3,\cdots)$ 是可数集，则并集 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 也是可数集.

**证** 不妨设 $A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$，对每个 $n$，设 $A_n=\{a_{nm}:m\in\mathbf{N}\}$，则有

$$A=\{a_{nm}:n,m\in\mathbf{N}\}.$$

令 $f(a_{nm})=(n,m)$，则 $f:A\to\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 是双射，由定理 1.4.2 知 $A$ 是可数集.

上述定理也常称为：可数个可数集之并是可数集. 另外不难证明：若有至多可数个集作并集，且每个集合都是至多可数集，则其并集也是至多可数集.

**推论 1.4.4** $\mathbf{R}^1$ 中的有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可数集，$\mathbf{R}^n$ 中的有理点集 $\mathbf{Q}^n$ 是可数集.

**证** 对每个 $n$，令 $A_n=\left\{\frac{m}{n}:m\in\mathbf{Z}\right\}$，显然有 $A_n\sim\mathbf{Z}$，所以 $\mathbf{Q}=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 是可数集，从而知 $\mathbf{Q}^n$ 是可数集.

**例 1.4.4** 设 $\Gamma$ 是可数集 $E$ 的所有有限子集的全体，则 $\Gamma$ 是可数集.

**证** 设可数集 $E=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$. 对每个 $n$，令 $E_n=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，则 $E_n$ 的幂集 $P(E_n)$ 是有限集. 因为 $E$ 的所有有限子集的全体 $\Gamma$ 即为 $\bigcup_{n=1}^{\infty}P(E_n)$，所以 $\Gamma$ 是至多可数集. 又 $\Gamma$ 显然不是有限集，所以 $\Gamma$ 是可数集.

**例 1.4.5** 设 $\Gamma$ 是 $\mathbf{R}^1$ 中的一族开区间，若每个开区间的端点为有理数，则 $\Gamma$ 是至多可数集.

**证** 对 $\Gamma$ 中的开区间 $(a,b)$，令 $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$ 中的点 $(a,b)$ 与之对应，得到从 $\Gamma$ 到 $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$ 的一个单射，所以 $\overline{\overline{\Gamma}}\leqslant\overline{\overline{\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}}}=\aleph_0$，从而可得 $\Gamma$ 是至多可数集.

**例 1.4.6** 设 $\Gamma$ 是 $\mathbf{R}^1$ 中的一族开区间，若其中任意两个开区间互不相交，则 $\Gamma$ 是至多可数集.

**证** 对 $\Gamma$ 中的每个开区间 $I$，取定 $I$ 中的一个有理数作为 $f(I)$，则 $f:\Gamma\to\mathbf{Q}$ 是一个单射，所以 $\overline{\overline{\Gamma}}\leqslant\overline{\overline{\mathbf{Q}}}$，从而可得 $\Gamma$ 是至多可数集.

**例 1.4.7** 设 $\Gamma$ 是平面上以有理点为中心，以有理数为半径的圆的全体，则 $\Gamma$ 为可数集.

**证** 记有理点集为 $\mathbf{Q}^2$，正有理数集为 $\mathbf{Q}^+$. 对 $A\in\Gamma$，设 $A$ 的圆心为 $(a,b)$，半径为 $r$，令 $f(A)=(a,b,r)$，则 $f:\Gamma\to\mathbf{Q}^2\times\mathbf{Q}^+$ 是双射，所以 $\Gamma\sim\mathbf{Q}^2\times\mathbf{Q}^+\sim\mathbf{N}$.

**定理 1.4.5** 若 $E$ 为无限集，$A$ 为至多可数集，则 $E\sim E\cup A$.

**证** 不妨设 $E\cap A=\varnothing$，由定理 1.4.1，知无限集 $E$ 有可数子集 $D$. 因为 $A$ 为至多可数集，于是有 $D\sim A\cup D$. 再由命题 1.3.1 知

$$E=(E\setminus D)\cup D\sim(E\setminus D)\cup(D\cup A)=E\cup A.$$

**推论 1.4.6** 设 $E$ 为不可数集，$A$ 是 $E$ 的可数子集，则 $E\sim E\setminus A$.

**证** 首先易知 $E\setminus A$ 不是有限集，因为否则 $E=(E\setminus A)\cup A$ 要为可数集，得矛盾. 所以 $E\setminus A$ 必为无限集，而 $A$ 是可数集，所以由定理 1.4.5 知 $E\setminus A\sim(E\setminus A)\cup A$

$=E$.

**例 1.4.8** $E$ 是无限集当且仅当:$E$ 与某个真子集对等.

**证** 充分性.若 $E$ 是有限集,则 $E$ 与每个真子集不对等,矛盾.

必要性.因 $E$ 是无限集,取 $x\in E$,由定理 1.4.5,有 $E\setminus\{x\}\sim(E\setminus\{x\})\cup\{x\}=E$,这里 $E\setminus\{x\}$ 即为与 $E$ 对等的真子集.

## 1.5 连续基数

为了建立集合之间的对应关系,有时要借助于 $p$ 进位小数.

设 $p$ 是大于 1 的自然数,而非负整数列 $\{n_k\}$ 满足 $0\leqslant n_k\leqslant p-1(k=1,2,3,\cdots)$,则

$$a=\frac{n_1}{p}+\frac{n_2}{p^2}+\frac{n_3}{p^3}+\cdots\frac{n_k}{p^k}+\cdots$$

为收敛级数,其和简记为 $a=0.n_1n_2n_3\cdots n_k\cdots$,并称为 $p$ **进位小数**.

一个 $p$ 进位小数 $a$,若从某一项以后 $n_k$ 全为 0,则称 $a$ 为 $p$ **进位有限小数**,否则称 $a$ 为 $p$ **进位无限小数**.

对于给定的 $p>1$,在 $(0,1]$ 中的每个实数 $a$ 可以唯一地表示为一个 $p$ 进位无限小数.但要注意,某些有理数既可表示为 $p$ 进位无限小数,又可表示为 $p$ 进位有限小数.例如

当 $p=10$ 时,有 $0.2000\cdots=0.1999\cdots$;

当 $p=3$ 时,有 $0.2000\cdots=0.1222\cdots$.

**定义 1.5.1** 实数集 $\mathbf{R}$ 的基数记作 $c$,称为**连续基数**(或**连续统**).

在 $\mathbf{R}^1$ 中,因为任一区间均与 $\mathbf{R}^1$ 对等,所以任一区间均具连续基数 $c$.另外不难证明:无理数集具连续基数 $c$,超越数集具连续基数 $c$(不是代数数的实数称为超越数).

**命题 1.5.1** 设 $E=\{(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots):x_k\in\{0,1\},k=1,2,3,\cdots\}$,则 $E$ 具连续基数 $c$.

**证** (1) 对 $a\in(0,1]$,把 $a$ 表示为二进位无穷小数 $a=0.a_1a_2a_3\cdots$,令 $f(a)=(a_1,a_2,a_3,\cdots)$,则 $f:(0,1]\to E$ 是单射,故有:$\overline{\overline{(0,1]}}\leqslant\overline{\overline{E}}$.

(2) 对 $b\in E$,设 $b=(b_1,b_2,b_3,\cdots)$,令 $f(b)=0.b_1b_2\dot{b}_3\cdots$(注意,这里是十进位

小数)，则 $f:E\to(0,1]$是单射，故有：$\overline{\overline{E}}\leqslant\overline{\overline{(0,1]}}$.

所以由定理 1.3.3 知$\overline{\overline{E}}=\overline{\overline{(0,1]}}=c$.

易知：如果 $p,q$ 为不相等的实数，则 $E=\{(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots):x_k\in\{p,q\},k=1,2,3,\cdots\}$也具连续基数 $c$.

**命题 1.5.2** 自然数集的幂集 $P(\mathbf{N})$具连续基数 $c$.

**证** 记 $E=\{(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots):x_k\in\{0,1\},k=1,2,3,\cdots\}$，对 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots)\in E$，令 $\mathbf{N}$ 的子集$\{k\in\mathbf{N}:x_k=1\}$为 $f(x)$，则 $f:E\to P(\mathbf{N})$是双射，所以有 $\overline{\overline{P(\mathbf{N})}}=\overline{\overline{E}}=c$.

由此可知：任一可数集的幂集都具连续基数 $c$.

**定理 1.5.3** 实数集是不可数集，即 $c>\aleph_0$.

**证** 由命题 1.5.2 及定理 1.3.5，知 $c=\overline{\overline{P(\mathbf{N})}}>\overline{\overline{\mathbf{N}}}=\aleph_0$.

**定理 1.5.4** 实数列全体 $\mathbf{R}^\infty=\{(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots):x_k\in\mathbf{R},k=1,2,3,\cdots\}$具连续基数 $c$.

**证** 设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots)\in\mathbf{R}^\infty$，令

$$f(x)=\{(k,r):r\in\mathbf{Q}\text{ 且 }r<x_k,k=1,2,3,\cdots\}.$$

则 $f:\mathbf{R}^\infty\to P(\mathbf{N}\times\mathbf{Q})$是单射，故有$\overline{\overline{\mathbf{R}^\infty}}\leqslant\overline{\overline{P(\mathbf{N}\times\mathbf{Q})}}=c$. 又显然有$\overline{\overline{\mathbf{R}^\infty}}\geqslant c$，所以实数列全体 $\mathbf{R}^\infty$具连续基数 $c$.

由此可知：若某个集合 $E$ 的"大小"介于 $\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{R}^\infty$之间，即满足$\overline{\overline{\mathbf{R}}}\leqslant\overline{\overline{E}}\leqslant\overline{\overline{\mathbf{R}^\infty}}$，则必有$\overline{\overline{E}}=c$.

还可知道：若集 $H$ 中每个元素由相互独立的可数个指标所决定，即 $H=\{a_{x_1,x_2,x_3,\cdots}\}$，而每个 $x_k$ 取自一个基数为 $c$ 的集，则 $H$ 的基数也是 $c$.

**推论 1.5.5** $\mathbf{R}^n$ 具连续基数 $c$.

**证** 由定理 1.5.4 知实数列全体 $\mathbf{R}^\infty$ 具连续基数 $c$. 设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$，令

$$f(x)=(x_1,x_2,\cdots,x_n,0,0,0,\cdots).$$

则 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^\infty$是单射，故有$\overline{\overline{\mathbf{R}^n}}\leqslant\overline{\overline{\mathbf{R}^\infty}}=c$. 又显然有$\overline{\overline{\mathbf{R}^n}}\geqslant c$，所以$\overline{\overline{\mathbf{R}^n}}=c$.

在 $\mathbf{R}^2$ 中，可以知道正方形$[0,1]\times[0,1]$具连续基数 $c$.

**推论 1.5.6** 若集族$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$中的每个集 $A_\lambda$ 具连续基数 $c$，且指标集 $\Lambda$ 也具连续基数 $c$，则并集$\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 也具连续基数 $c$.

**证** 不妨设集族$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$中的集合互不相交. 对每个$\lambda\in\Lambda$, 存在双射$h_\lambda:A_\lambda\to\mathbf{R}$. 现在对$x\in\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$, 存在唯一的$\lambda\in\Lambda$, 使$x\in A_\lambda$, 令$f(x)=(\lambda,h_\lambda(x))$. 则$f:\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\to\Lambda\times\mathbf{R}$是双射. 再由$\Lambda\times\mathbf{R}\sim\mathbf{R}^2$, 所以并集$\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$具连续基数$c$.

**例 1.5.1** 设$H$为自然数列全体所成之集, 则$H$具连续基数$c$.

**证** 记$E=\{(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots):x_k\in\{0,1\},k=1,2,3,\cdots\}$, 由命题 1.5.1 知$E$具连续基数$c$.

由定理 1.5.4, 知实数列全体$\mathbf{R}^\infty=\{(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots):x_k\in\mathbf{R},k=1,2,3,\cdots\}$具连续基数$c$. 再由$E\subset H\subset\mathbf{R}^\infty$及推论 1.3.4, 知$H$也具有连续基数$c$.

**例 1.5.2** 记$[a,b]$上连续函数全体为$C[a,b]$, 则$C[a,b]$具连续基数$c$.

**证** 对任意实数$t$, 常数函数$y=t$属于$C[a,b]$, 于是有$\overline{\overline{C[a,b]}}\geqslant c$.

记$\mathbf{Q}\cap[a,b]=\{r_1,r_2,\cdots,r_k,\cdots\}$. 对每个$f\in C[a,b]$, 构造$\mathbf{R}^\infty$中的实数列$h(f)=(f(r_1),f(r_2),\cdots,f(r_k),\cdots)$, 则得到映射$h:C[a,b]\to\mathbf{R}^\infty$.

对$f,g\in C[a,b]$且$f\neq g$, 则必有$h(f)\neq h(g)$. 否则若有$h(f)=h(g)$, 即$f$与$g$在$[a,b]$中的一切有理点取值相同, 由函数的连续性, 知$f$与$g$在$[a,b]$中的任何点取值相同, 从而有$f=g$, 得到矛盾. 所以$h:C[a,b]\to\mathbf{R}^\infty$为单射, 于是有$\overline{\overline{C[a,b]}}\leqslant\overline{\overline{\mathbf{R}^\infty}}=c$.

合之有$\overline{\overline{C[a,b]}}=c$.

**注 1.1** 已知$\aleph_0$与$c$是两个重要的无限基数, 且有$\aleph_0<c$, 自然就产生一个重要的问题: "是否存在基数$\alpha$, 使$\aleph_0<\alpha<c$?"

Cantor 猜测不存在这样的基数, 这个著名的猜测称为 Cantor 的"**连续统假设**". 在 1940 年, Godel 证明了在 ZFC 集合论公理系统中推不出连续统假设不真. 在 1963 年, Cohen 证明了在 ZFC 集合论公理系统中推不出连续统假设为真.

## 1.6 例题选讲

**例 1.6.1** 设$E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$, $B_k=E\setminus A_k(k=1,2,\cdots)$, 证明: $E=\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k\cup\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}B_k$.

**证** 易知$E\supset\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k$与$E\supset\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}B_k$, 故有$E\supset\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k\cup\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}B_k$.

下设$x\in E$, 若$x\notin\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$, 则存在$n\in\mathbf{N}$, 当$k\geqslant n$时, 有$x\notin A_k$. 于是

$x\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}(E\setminus A_k)=\varliminf\limits_{k\to\infty}B_k$，从而 $x\in\varlimsup\limits_{k\to\infty}A_k\cup\varliminf\limits_{k\to\infty}B_k$，故 $E\subset\varlimsup\limits_{k\to\infty}A_k\cup\varliminf\limits_{k\to\infty}B_k$.

合之有 $E=\varlimsup\limits_{k\to\infty}A_k\cup\varliminf\limits_{k\to\infty}B_k$.

**例 1.6.2** 设 $f(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x),\cdots$ 是定义在 $\mathbf{R}^1$ 上的实值函数，记 $\{f_k(x)\}$ 不收敛于 $f(x)$ 的点 $x$ 所组成的集合为 $D$. 证明：

$$D=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\left\{x:|f_k(x)-f(x)|\geqslant\frac{1}{i}\right\}.$$

**证** $x\in D$

$\Leftrightarrow$ 存在 $\varepsilon>0$，对任意 $n\in\mathbf{N}$，存在 $k\geqslant n$，使 $|f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon$

$\Leftrightarrow$ 存在 $i\in\mathbf{N}$，对任意 $n\in\mathbf{N}$，存在 $k\geqslant n$，使 $|f_k(x)-f(x)|\geqslant\dfrac{1}{i}$

$\Leftrightarrow$ 存在 $i\in\mathbf{N}$，对任意 $n\in\mathbf{N}$，使 $x\in\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}\left\{x:|f_k(x)-f(x)|\geqslant\dfrac{1}{i}\right\}$

$\Leftrightarrow$ 存在 $i\in\mathbf{N}$，使 $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}\left\{x:|f_k(x)-f(x)|\geqslant\dfrac{1}{i}\right\}$

$\Leftrightarrow x\in\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}\left\{x:|f_k(x)-f(x)|\geqslant\dfrac{1}{i}\right\}$.

**例 1.6.3** 设映射 $f:X\to Y$，且 $S\subset Y$，证明：$f(f^{-1}(S))=S\cap f(X)$.

**证** 由命题 1.2.1 可知 $f(f^{-1}(S))\subset S$. 又由 $f^{-1}(S)\subset X$ 知 $f(f^{-1}(S))\subset f(X)$，所以有 $f(f^{-1}(S))\subset S\cap f(X)$.

反之，设 $y\in S\cap f(X)$. 由 $y\in f(X)$，存在 $x\in X$ 使 $y=f(x)$. 又由 $y\in S$，即有 $x\in f^{-1}(S)$，得 $y=f(x)\in f(f^{-1}(S))$，于是 $f(f^{-1}(S))\supset S\cap f(X)$.

合之，得 $f(f^{-1}(S))=S\cap f(X)$.

**例 1.6.4** 试证明 $f:X\to Y$ 是满射当且仅当：对任意的 $B\subset Y$，有 $f(f^{-1}(B))=B$.

**证** 必要性. 对任意的 $B\subset Y$，由上题知 $f(f^{-1}(B))=B\cap f(X)$，因 $f:X\to Y$ 是满射，故 $f(X)=Y$，于是 $f(f^{-1}(B))=B\cap f(X)=B\cap Y=B$.

充分性. 对任意的 $B\subset Y$，有 $f(f^{-1}(B))=B$. 令 $B=Y$，则有 $f(f^{-1}(Y))=Y$. 因为 $f^{-1}(Y)=X$，于是 $f(X)=Y$，所以 $f$ 为满射.

**例 1.6.5** 设映射 $f:X\to Y$. 证明下列条件等价：

(1) $f$ 是单射；

(2) 对任意 $A,B\subset X$，有 $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$；

(3) 对任意 $A\subset X$,有 $A=f^{-1}(f(A))$.

**证** (1)⇒(2):对 $y\in f(A)\cap f(B)$,存在 $a\in A$ 使 $y=f(a)$,存在 $b\in B$ 使 $y=f(b)$. 因 $f$ 是单射,必有 $a=b$,所以 $y\in f(A\cap B)$,从而 $f(A\cap B)\supset f(A)\cap f(B)$. 再由命题 1.2.2 知 $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$,所以有 $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.

(2)⇒(3):对任意 $A\subset X$,由命题 1.2.1 知 $A\subset f^{-1}(f(A))$,令 $B=f^{-1}(f(A))\setminus A$. 因为 $B\subset f^{-1}(f(A))$,知 $f(B)\subset f(A)$,故 $f(B)=f(A)\cap f(B)=f(A\cap B)=\varnothing$. 所以 $B=\varnothing$,即 $A=f^{-1}(f(A))$.

(3)⇒(1):设 $a,b\in X$ 且 $a\neq b$,由(3)知 $b\notin\{a\}=f^{-1}(f(\{a\}))$,从而 $f(a)\neq f(b)$. 所以 $f$ 是单射.

**例 1.6.6** 设映射 $f:X\to Y$. 若 $A,B\subset X$,其中 $A=f^{-1}(S)$,$S\subset Y$. 试证明:

$$f(A\cap B)=f(A)\cap f(B).$$

**证** 只要证 $f(A\cap B)\supset f(A)\cap f(B)$. 设 $y\in f(A)\cap f(B)$,因为 $y\in f(B)$,故存在 $x\in B$ 使 $y=f(x)$. 因为 $y\in f(A)=f(f^{-1}(S))\subset S$,故 $x\in f^{-1}(S)=A$. 于是由 $x\in A\cap B$,得 $y=f(x)\in f(A\cap B)$,于是 $f(A\cap B)\supset f(A)\cap f(B)$.

**例 1.6.7** 设 $X$ 为无限集,映射 $f:X\to X$,试证明:存在 $X$ 中的非空真子集 $E$,使得 $f(E)\subset E$.

**证** 取 $x\in X$,令 $y_1=f(x)$,$y_2=f(y_1)$,$y_3=f(y_2)$,$\cdots$,$y_n=f(y_{n-1})$,$\cdots$,得到一列 $y_1,y_2,y_3,\cdots$,下面分情况讨论:

(1) 若存在 $k\neq 1$,使 $y_k=y_1$,令 $E=\{y_1,y_2,y_3,\cdots,y_{k-1}\}$,则有限集 $E$ 显然为 $X$ 的非空真子集,且 $f(E)\subset E$.

(2) 若任意 $k\neq 1$,有 $y_k\neq y_1$,令 $E=\{y_2,y_3,\cdots,y_k,\cdots\}$,则集 $E$ 显然为 $X$ 的非空真子集,且 $f(E)\subset E$.

**例 1.6.8** 证明:$\mathbf{R}^1$ 上单调函数的不连续点集为至多可数集.

**证** 设 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}^1$ 上的单调递增函数,$E$ 为 $f(x)$ 的不连续点集. 对每个 $x\in E$,取开区间 $(f(x-0),f(x+0))$ 中一个有理数 $r_x$ 与之对应,则这个对应是从 $E$ 到有理数集 $\mathbf{Q}$ 的一个单射. 所以 $\overline{\overline{E}}\leqslant\overline{\overline{\mathbf{Q}}}$,从而可得 $E$ 为至多可数集.

**例 1.6.9** 设 $\Gamma$ 是平面上的一族圆,其中任意两个圆互不相交,则 $\Gamma$ 为至多可数集.

**证** 记 $\mathbf{Q}^2$ 为平面上有理点全体,对每个圆 $A\in\Gamma$,在圆 $A$ 中取定一个有理点作为 $f(A)$,则 $f:\Gamma\to\mathbf{Q}^2$ 是单射,故 $\overline{\overline{\Gamma}}\leqslant\overline{\overline{\mathbf{Q}^2}}=\aleph_0$.

**例 1.6.10** 设 $\Gamma$ 是平面上的一族圆周，其中任意两个圆周互不相交，则 $\Gamma$ 为至多可数集吗?

**解** 不一定. 设 $\Gamma$ 是平面上以原点为中心的同心圆周的全体，则 $\Gamma$ 具连续基数 $c$.

**例 1.6.11** 设 $\Gamma$ 是平面上一切圆所成之集，则 $\Gamma$ 具连续基数 $c$.

**证** 记正实数集为 $\mathbf{R}^+$. 对 $A\in\Gamma$，若 $A$ 的圆心为 $(a,b)$，半径为 $r$，令 $f(A)=(a,b,r)$，则 $f:\Gamma\to\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^+$ 是双射. 因为 $\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^+$ 具连续基数 $c$，所以 $\Gamma$ 具连续基数 $c$.

**例 1.6.12** 设 $E\subset\mathbf{R}^3$，若 $E$ 中任意两点间的距离是有理数，则 $E$ 为至多可数集.

**证** 不妨设 $E$ 中的点不全在一条直线上，取不共线的三点 $a,b,c\in E$，记正有理数集 $\mathbf{Q}^+=\{r_1,r_2,\cdots,r_k,\cdots\}$，记点 $x$ 与 $y$ 的距离为 $|x-y|$，对 $i,j,k\in\mathbf{N}$，记

$$A_i=\{x\in\mathbf{R}^3:|x-a|=r_i\},B_j=\{x\in\mathbf{R}^3:|x-b|=r_j\},C_k=\{x\in\mathbf{R}^3:|x-c|=r_k\}.$$

令 $H_{ijk}=A_i\cap B_j\cap C_k$，则有 $E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}H_{ijk}$. 因为 $A_i,B_j,C_k$ 中任意两个集的交为空集、单点集或圆周，所以可证 $H_{ijk}$ 至多含两个点，从而可得 $E$ 为至多可数集.

**例 1.6.13** 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}^1$ 上的实函数，如对每个 $x_0\in\mathbf{R}^1$，存在 $\delta>0$，使当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)\geqslant f(x_0)$. 证明：$E=f(\mathbf{R}^1)$ 是至多可数集.

**证** 对 $y\in E$，在 $f^{-1}(y)$ 取定一点 $x_y$，选取含 $x_y$ 的开区间 $(a_y,b_y)$ 且端点为有理数，使当 $x\in(a_y,b_y)$ 时有 $f(x)\geqslant f(x_y)=y$. 现在令 $\varphi(y)=(a_y,b_y)\in\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$，则 $\varphi:E\to\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$ 是单射.

事实上，对任意 $y,z\in E$ 且 $y\neq z$，若有 $\varphi(y)=\varphi(z)$，即 $(a_y,b_y)=(a_z,b_z)$. 由 $x_y\in(a_y,b_y)=(a_z,b_z)$，故 $y=f(x_y)\geqslant f(x_z)=z$. 同理可证 $z\geqslant y$. 故 $y=z$，得矛盾，所以 $\varphi$ 为单射，从而可得 $\overline{\overline{E}}\leqslant\overline{\overline{\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}}}=\aleph_0$.

**例 1.6.14** 平面上集 $\mathbf{Q}^2$ 中的点称为有理点，证明：平面上存在不含有理点的圆周.

**证** (反证法)若任何圆周皆含有理点. 把中心在原点，半径为 $r$ 的圆周记为 $S_r$，对每个 $r\in(0,+\infty)$，在圆周 $S_r$ 上取一个有理点记作 $f(r)$，则 $f:(0,+\infty)\to\mathbf{Q}^2$ 是单射，所以有 $c=\overline{\overline{(0,+\infty)}}\leqslant\overline{\overline{\mathbf{Q}^2}}=\aleph_0$，得矛盾.

**例 1.6.15** 设 $\Gamma$ 为 $[a,b]$ 上一切实函数所成之集，则 $\Gamma$ 的基数为 $2^c$.

**证** 设 $E$ 是 $[a,b]$ 的任一子集，令 $\Gamma$ 中的元

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E,\\ 0, & x\in[a,b]\setminus E,\end{cases}$$

与之对应，则得到从 $[a,b]$ 的幂集到 $\Gamma$ 的一个单射，而 $[a,b]$ 的幂集的基数为 $2^c$，故 $2^c\leqslant\overline{\overline{\Gamma}}$.

另一方面，对每个 $f\in\Gamma$，令平面 $\mathbf{R}^2$ 的子集 $\{(x,f(x)):x\in[a,b]\}$ 与之对应，则得到从 $\Gamma$ 到 $\mathbf{R}^2$ 的幂集的一个单射，而 $\mathbf{R}^2$ 的幂集的基数为 $2^c$，故 $\overline{\overline{\Gamma}}\leqslant 2^c$.

合之，有 $\overline{\overline{\Gamma}}=2^c$.

**例 1.6.16** 设 $E$ 是平面 $\mathbf{R}^2$ 中的可数集，则存在互不相交的集 $A$ 与 $B$，使 $E=A\cup B$，且任一平行于 $x$ 轴的直线交 $A$ 至多是有限集，任一平行于 $y$ 轴的直线交 $B$ 至多是有限集.

**证** 因 $E$ 是可数集，故存在 $H=\{(x_i,y_j)\in\mathbf{R}^2:i=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots\}$ 使 $E\subset H$，令

$$A=\{(x_i,y_j)\in E:i\leqslant j\},B=\{(x_i,y_j)\in E:i>j\}.$$

则 $E=A\cup B$，$A\cap B=\varnothing$. 注意到平行于 $x$ 轴的直线 $y=y_j$ 交 $A$ 至多 $j$ 个点，平行于 $y$ 轴的直线 $x=x_i$ 交 $B$ 至多 $i-1$ 个点，而除此以外平行于坐标轴的直线与 $E$ 皆不相交，所以集 $A$ 与 $B$ 满足要求.

**例 1.6.17** 设 $E$ 是 $\mathbf{R}^1$ 中可数集，对任意的 $a\in\mathbf{R}^1$，记 $E+\{a\}=\{x+a:x\in E\}$. 证明：存在数 $a$，使 $E\cap(E+\{a\})=\varnothing$.

**证** 因为 $E$ 是可数集，故 $H=\{x-y:x,y\in E\}$ 为可数集，从而可取 $a\notin H$. 若有 $x\in E\cap(E+\{a\})$，则 $x\in E$ 及 $x\in E+\{a\}$. 取 $y\in E$，使 $x=y+a$，于是 $a=x-y\in H$，得矛盾，所以必有 $E\cap(E+\{a\})=\varnothing$.

**例 1.6.18** 设 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，若 $\overline{\overline{A}}=c$，则至少有一个集 $A_n$ 的基数是 $c$.

**证** 若对任意的 $n$ 有 $\overline{\overline{A_n}}<c$. 因 $\overline{\overline{A}}=c$，由定理 1.5.4 知实数列全体 $\mathbf{R}^\infty$ 具连续基数 $c$，可作双射 $f:A\to\mathbf{R}^\infty$. 对每个 $n$，记 $f(A_n)=B_n$，则 $\mathbf{R}^\infty=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$，且有 $\overline{\overline{B_n}}=\overline{\overline{A_n}}<c$.

对每个 $n$，构造映射 $p_n:\mathbf{R}^\infty\to\mathbf{R}$ 如下：

$$对\ x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in\mathbf{R}^\infty，令\ p_n(x)=x_n.$$

则由 $p_n:B_n\to p_n(B_n)$ 为满射，知 $\overline{\overline{p_n(B_n)}}\leqslant\overline{\overline{B_n}}<c$. 于是存在 $y_n\in\mathbf{R}$，使 $y_n\notin p_n(B_n)$.

今考虑 $\mathbf{R}^{\infty}$ 中的元 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots)$，对每个 $n$ 有 $y_n\notin p_n(B_n)$，故 $y\notin B_n$，于是 $y\notin\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n=\mathbf{R}^{\infty}$，得矛盾.

**例 1.6.19** 试将自然数集分成 $c$ 个子集，使得任意两个子集均有严格的包含关系.

**解** 记 $\mathbf{Q}=\{r_1,r_2,\cdots,r_k,\cdots\}$，对每个 $x\in(0,+\infty)$，令 $\mathbf{N}_x=\{k\in\mathbf{N}:r_k\in(-x,x)\cap\mathbf{Q}\}$，则 $\mathbf{N}=\bigcup_{x\in(0,+\infty)}\mathbf{N}_x$. 显然，当 $x<y$ 时有 $\mathbf{N}_x\subset\mathbf{N}_y$.

**例 1.6.20** 设 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内可微，若除了可数集外，有 $f'(x)=0$，证明：$f(x)=c$（常数）.

**证** 若存在 $s\in(a,b)$ 使得 $f'(s)=t\neq0$，不妨设 $t>0$，记 $E=\{x:0<f'(x)<t\}$，则由数学分析中的达布定理知 $f':E\to(0,t)$ 是满射，故 $\overline{\overline{E}}\geqslant\overline{\overline{(0,t)}}$，从而可得 $\{x:f'(x)\neq0\}$ 不可数，得矛盾. 所以 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内处处有 $f'(x)=0$，知 $f(x)=c$（常数）.

# 习题一

1. 证明：$(A_1\setminus B_1)\cap(A_2\setminus B_2)=(A_1\cap A_2)\setminus(B_1\cup B_2)$.

2. 证明：$(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)\setminus(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda)\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda\setminus B_\lambda)$.

3. 证明：$(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)\times B=\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k\times B)$

4. 设映射 $f:X\to Y$，$A\subset B\subset X$，证明：$f(B)\setminus f(A)\subset f(B\setminus A)$.

5. 设映射 $f:X\to Y$，$A\subset B\subset Y$，证明：$f^{-1}(B\setminus A)=f^{-1}(B)\setminus f^{-1}(A)$.

6. 设 $f:X\to Y$ 是单射，则有 $f(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}f(A_\lambda)$.

7. 设 $f:X\to Y$；$g:Y\to X$. 若对任意的 $x\in X$，必有 $g[f(x)]=x$，则 $f$ 是单射，$g$ 是满射.

8. 若$(A\setminus B)\sim(B\setminus A)$，证明：$A\sim B$.

9. 对任意两个基数 $\alpha,\beta$，证明下述三个关系，至多成立一式：$\alpha<\beta,\alpha=\beta,\alpha>\beta$.

10. 试作双射 $f:[0,1]\to(0,1)$.

11. 证明：全体代数数(整系数方程的根)所成之集合是可数集.

12. 设 $E\subset\mathbf{R}^2$，若对任意的矩形 $I$，集 $E\cap I$ 为可数的，证明：$E$ 是可数集.

13. 设 $\Gamma$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一族三角形，若每个三角形的顶点为有理点，则 $\Gamma$ 是至多可数集.

14. 设 $\Gamma$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一族矩形，若其中任意两个矩形互不相交，则 $\Gamma$ 是至多可数集.

15. 设 $E\subset\mathbf{R}^2$，若 $E$ 中任意两点间的距离大于 1，证明：$E$ 是至多可数集.

16. 设 $E\subset\mathbf{R}^1$，若 $E$ 中任意两点间的距离为有理数，证明：$E$ 是至多可数集.

17. 证明：$[0,1]$中的全体无理数所成之集合具连续基数 $c$.

18. 证明：全体超越数所成之集合具连续基数 $c$.

19. 设 $E$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的不可数集，则存在以原点为中心的一个球，它包含 $E$ 中不可数个点.

20. 设 $\Gamma$ 为直线上所有开区间的全体，证明：$\Gamma$ 具连续基数 $c$.

21. 设 $E=A\cup B$，$\overline{\overline{E}}=c$，则 $A$ 与 $B$ 中至少有一集的基数为 $c$.

22. 试作双射 $f:[0,1]\to\mathbf{R}$.

23. 试作双射 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$.

24. 设 $E\subset\mathbf{R}$ 为可数集，试作 $\mathbf{R}$ 上的递增函数 $f(x)$，使 $f(x)$ 的不连续点集恰为 $E$.

25. 证明：不存在定义在 $\mathbf{R}$ 上的连续函数 $f(x)$，使 $f(\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q})\subset\mathbf{Q}$ 及 $f(\mathbf{Q})\subset\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$.

26. 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可微，且除可数集外，有 $f'(x)>0$，证明：$f(x)$ 是严格递增函数.

27. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可微，且除可数集外，有 $f'(x)=1$，证明：$f(x)=x$.

28. 记 $\Gamma$ 为在 $\mathbf{R}^2$ 上定义的二元连续函数 $f(x,y)$ 之全体，证明：$\Gamma$ 具有连续基数 $c$.

29. 设 $\Gamma$ 为自然数的一切严格单调序列所成之集，则 $\Gamma$ 具连续基数 $c$.

30. 设 $\Gamma$ 为自然数集 $\mathbf{N}$ 的无限子集全体，则 $\Gamma$ 具连续基数 $c$.

31. 设 $\{x_n\}$ 为一序列，其中的元素彼此不同，则它的子序列全体组成基数为 $c$ 的集.

32. 设 $\Gamma$ 为实数集 $\mathbf{R}$ 的所有有限子集所成之集，则 $\Gamma$ 具连续基数 $c$.

33. 证明：平面上存在边界线上不含有理点的正方形.

34. 设 $a,b\in\mathbf{R}^2\backslash\mathbf{Q}^2$，$a\neq b$，则存在联结 $a,b$ 且不含有理点的折线.

# 2 点 集

本书的研究对象是定义于 $n$ 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{R}^n$ 的一类子集上的一类实值函数. 这类子集和这类函数与 $\mathbf{R}^n$ 的拓扑有关. 因而我们首先要学习 $\mathbf{R}^n$ 中与拓扑有关的各种子集的结构与性质.

## 2.1 $n$ 维欧氏空间

在直积集 $\mathbf{R}^n$ 中定义加法与数乘运算:

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$, $\lambda\in\mathbf{R}$, 则定义

加法 $x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$;

数乘 $\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n)$.

在上述两种运算下, $\mathbf{R}^n$ 构成实数域上的 $n$ **维向量空间**. 称 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的**向量**或**点**, 称 $x_k$ 是点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的**第 $k$ 个坐标**.

对 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 记 $|x|=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}$, 并称 $|x|$ 为向量 $x$ 的**模**或**长度**.

有了加法与数乘后, 自然就有减法: $x-y=x+(-y)=(x_1-y_1,x_2-y_2,\cdots,x_n-y_n)$.

对 $\mathbf{R}^n$ 中任意两个元 $x$ 与 $y$, 定义 $d(x,y)=|x-y|$, 则有下述性质成立:

(1) 非负性 $d(x,y)\geqslant 0$, $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$; (2.1)

(2) 对称性 $d(x,y)=d(y,x)$; (2.2)

(3) 三角不等式 $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$. (2.3)

于是在 $\mathbf{R}^n$ 中定义了距离 $d$, 即 $(\mathbf{R}^n,d)$ 为距离空间. 赋予这样的距离, 我们称 $\mathbf{R}^n$ 为 **$n$ 维欧氏空间**.

**定义 2.1.1** 设 $x_0\in\mathbf{R}^n$, $\delta>0$, 称集合 $\{x\in\mathbf{R}^n: |x-x_0|<\delta\}$ 为以 $x_0$ 为中心, 以 $\delta$ 为半径的**开球**, 也称为 $x_0$ 的**球邻域**, 记为 $B(x_0,\delta)$. 称集合 $\{x\in\mathbf{R}^n: |x-x_0|\leqslant\delta\}$ 为以 $x_0$ 为中心, 以 $\delta$ 为半径的**闭球**, 记为 $\overline{B}(x_0,\delta)$.

下面的命题是显然的.

**命题 2.1.1** 设 $B(x,\delta)\subset\mathbf{R}^n$,则对任意 $y\in B(x,\delta)$,可取 $r>0$,使 $B(y,r)\subset B(x,\delta)$.

除了开球和闭球以外,我们还需要下述矩体的概念.

**定义 2.1.2** 设 $I_k(k=1,2,3,\cdots,n)$为区间,则称直积集 $I=I_1\times I_2\times\cdots\times I_n$ 为**矩体**;若每个 $I_k$ 为开区间,称直积集 $I$ 为**开矩体**;若每个 $I_k$ 为闭区间,称直积集 $I$ 为**闭矩体**;若每个 $I_k$ 为半开区间,称直积集 $I$ 为**半开矩体**;若每个 $I_k$ 为左开区间,称直积集 $I$ 为**左开矩体**. 特别地,若矩体 $I$ 所有的 $I_k$长度相等,则称 $I$ 为**方体**.

矩体 $I$ 的**体积**是它的边长的乘积,记作$|I|$.

**定义 2.1.3** 设 $E\subset\mathbf{R}^n$,记 $\mathrm{diam}(E)=\sup\{|x-y|:x,y\in E\}$,它被称为集 $E$ 的**直径**. 若 $\mathrm{diam}(E)<\infty$,则称 $E$ 为**有界集**.

设 $E\subset\mathbf{R}^n$,则 $E$ 是有界集当且仅当:存在 $M>0$,使得任意 $x\in E$,有$|x|\leqslant M$.

**定义 2.1.4** 设 $x_k\in\mathbf{R}^n(k=1,2,\cdots)$,若存在 $x_0\in\mathbf{R}^n$,使得$\lim\limits_{k\to\infty}|x_k-x_0|=0$,则称点列$\{x_k\}$在 $\mathbf{R}^n$ 中**收敛**于$x_0$,称 $x_0$ 为点列$\{x_k\}$的**极限**,记为 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x_0$(或 $x_k\to x_0$).

若设 $x_k=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})(k=0,1,2,\cdots)$,则有 $|x_k-x_0|^2=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i^{(k)}-x_i^{(0)}|^2$. 于是

$$\lim_{k\to\infty}|x_k-x_0|=0\Leftrightarrow\lim_{k\to\infty}|x_i^{(k)}-x_i^{(0)}|=0(i=1,2,\cdots,n).$$

即 $\mathbf{R}^n$ 中点列的收敛性可以归结到每个坐标所形成的数列的收敛性.

## 2.2 开集与内点

**定义 2.2.1** 设 $E\subset\mathbf{R}^n$,$x\in E$. 若存在 $\delta>0$,使 $B(x,\delta)\subset E$,则称 $x$ 是 $E$ 的**内点**. $E$ 的内点的全体称为 $E$ 的**内核**,记为 $\mathring{E}$(或 $E^\circ$).

对任意 $E\subset\mathbf{R}^n$,显然有 $\mathring{E}\subset E$.

**例 2.2.1** $\mathbf{R}^1$ 中,$[a,b]^\circ=(a,b)$,$[a,b)^\circ=(a,b)$,$\mathring{\mathbf{Q}}=\varnothing$,$\big((a,b)\cap\mathbf{Q}\big)^\circ=\varnothing$.

**定义 2.2.2** 设 $G\subset\mathbf{R}^n$,若对任意 $x\in G$,$x$ 是 $G$ 的内点,则称 $G$ 是**开集**. 同时我们规定空集$\varnothing$是开集.

**例 2.2.2** 直线 $\mathbf{R}^1$ 中的开区间是开集，空间 $\mathbf{R}^n$ 中的开球和开矩体都是开集.

下面的引理是显然的，读者可自行验证.

**引理 2.2.1** 设 $G\subset\mathbf{R}^n$ 为非空. 则下列条件等价：

(1) $G$ 是开集；(2) $G=\mathring{G}$；(3) 对任意 $x\in G$，存在 $\delta>0$，使 $B(x,\delta)\subset G$.

**定理 2.2.2** 关于开集有如下性质：

(1) $\varnothing$ 与 $\mathbf{R}^n$ 是开集；

(2) 任意个开集的并集是开集；

(3) 有限个开集的交集是开集.

**证** (1) 显然.

(2) 设 $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是一族开集，设 $x\in\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$，存在 $\lambda_0\in\Lambda$，使 $x\in G_{\lambda_0}$. 因为 $G_{\lambda_0}$ 是开集，存在 $\delta>0$，使 $B(x,\delta)\subset G_{\lambda_0}$，则 $B(x,\delta)\subset G_{\lambda_0}\subset\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$，由引理 2.2.1，知 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$ 是开集.

(3) 设 $G_1,G_2$ 是开集，若 $x\in G_1\cap G_2$，则 $x\in G_1$ 且 $x\in G_2$，故存在 $\delta_1>0$ 与 $\delta_2>0$，使 $B(x,\delta_1)\subset G_1$ 与 $B(x,\delta_2)\subset G_2$ 成立. 令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则 $B(x,\delta)\subset G_1\cap G_2$，所以由引理 2.2.1，知 $G_1\cap G_2$ 是开集.

$\mathbf{R}^n$ 赋予如上所指定的开集族成为一个拓扑空间，这是一个由欧几里得距离 $d$ 所生成的拓扑，也称为 $\mathbf{R}^n$ 上的常用拓扑.

**命题 2.2.3** 对于任意集 $E\subset\mathbf{R}^n$，$\mathring{E}$ 是开集.

**证** 因为空集是开集，故只要考虑 $\mathring{E}$ 为非空的情况. 设 $x\in\mathring{E}$，存在 $\delta>0$，使 $B(x,\delta)\subset E$. 对任意 $y\in B(x,\delta)$，可取 $r>0$，使 $B(y,r)\subset B(x,\delta)\subset E$，故 $y\in\mathring{E}$，于是有 $B(x,\delta)\subset\mathring{E}$. 由引理 2.2.1，知 $\mathring{E}$ 是开集.

**命题 2.2.4** 设 $E_1,E_2\subset\mathbf{R}^n$，则(1) $E_1\subset E_2\Rightarrow\mathring{E}_1\subset\mathring{E}_2$；(2) $(E_1\cap E_2)^\circ=\mathring{E}_1\cap\mathring{E}_2$；(3) $(E^\circ)^\circ=E^\circ$.

**证** (1) 显然.

(2) 由(1)可知 $(E_1\cap E_2)^\circ\subset\mathring{E}_1$，$(E_1\cap E_2)^\circ\subset\mathring{E}_2$，故 $(E_1\cap E_2)^\circ\subset\mathring{E}_1\cap\mathring{E}_2$. 另一方面，若 $x\in\mathring{E}_1\cap\mathring{E}_2$，则由命题 2.2.3 及定理 2.2.2 知 $\mathring{E}_1\cap\mathring{E}_2$ 是开集，故存在 $\delta>0$，使

$B(x,\delta)\subset\mathring{E}_1\cap\mathring{E}_2\subset E_1\cap E_2$，从而有 $x\in(E_1\cap E_2)^\circ$，所以 $(E_1\cap E_2)^\circ\supset\mathring{E}_1\cap\mathring{E}_2$.

(3) 由命题 2.2.3 知 $\mathring{E}$ 是开集，再由引理 2.2.1 知 $(E^\circ)^\circ=E^\circ$.

**定义 2.2.3** 设 $G$ 是直线 $\mathbf{R}^1$ 中的开集，若开区间 $(a,b)\subset G$，且端点 $a,b$ 不属于 $G$，称 $(a,b)$ 为 $G$ 的**构成区间**. 注意，这里 $a$ 可以是 $-\infty$，$b$ 可以是 $+\infty$.

**引理 2.2.5** 设 $G$ 是 $\mathbf{R}^1$ 中的开集，则 $G$ 中每一点必属于 $G$ 的一个构成区间.

**证** 设 $x\in G$，因 $G$ 是开集，故存在 $r>0$ 使 $(x-r,x+r)\subset G$. 令

$$a=\inf\{s:(s,x)\subset G\},b=\sup\{t:(x,t)\subset G\}.$$

则可证 $(a,b)$ 为 $G$ 的构成区间，且有 $x\in(a,b)$.

**引理 2.2.6** 设 $G$ 是 $\mathbf{R}^1$ 中的开集，则 $G$ 的任何两个不同的构成区间互不相交.

**证** 设 $(a,b)$ 与 $(c,d)$ 是 $G$ 的两个构成区间，若他们相交，取 $x\in(a,b)\cap(c,d)$，则有 $a<x<b,c<x<d$. 若 $a<c$，则 $c\in(a,x)\subset G$，此与 $(c,d)$ 是 $G$ 的构成区间矛盾，故必 $a\geqslant c$. 同理可得 $c\geqslant a$，即有 $a=c$. 类似可得 $b=d$，从而可得 $(a,b)$ 与 $(c,d)$ 相同.

**定理 2.2.7($\mathbf{R}^1$ 中开集的构造定理)** $\mathbf{R}^1$ 中的非空开集 $G$ 是至多可数个互不相交的构成区间之并.

**证** 由引理 2.2.5 知非空开集 $G$ 是它的所有构成区间之并，再由引理 2.2.6 知任何两个不同的构成区间互不相交，所以这族开区间是至多可数的(见第一章例 1.4.6).

**定理 2.2.8($\mathbf{R}^n$ 中开集的构造定理)** $\mathbf{R}^n$ 中的非空开集 $G$ 是可数个互不相交的半开方体之并.

**证** 为书写方便，以非空开集 $G\subset\mathbf{R}^2$ 的情况来证明.

对每个自然数 $k$，作平面上的直线网 $x=\frac{s}{2^k}(s\in\mathbf{Z})$，$y=\frac{t}{2^k}(t\in\mathbf{Z})$，把平面 $\mathbf{R}^2$ 分割成可数个边长为 $\frac{1}{2^k}$ 的左开正方形，其全体记为 $\Gamma_k$，令 $\Gamma=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{I\in\Gamma_k:I\subset G\}$，则 $\Gamma$ 为至多可数集，且可证

$$G=\bigcup\{I:I\in\Gamma\}.\tag{2.4}$$

事实上，$G\supset\bigcup\{I:I\in\Gamma\}$ 是显然的. 另一方面，设 $x\in G$，由 $G$ 为开集，存在 $\delta>0$，使 $B(x,\delta)\subset G$. 因为 $\Gamma_k$ 中的正方形的边长 $\frac{1}{2^k}\to0(k\to\infty)$，故存在 $k_0$ 及 $\Gamma_{k_0}$ 中的一个

正方形 $I$，使 $x\in I\subset B(x,\delta)\subset G$. 于是 $x\in\bigcup\{I:I\in\Gamma\}$，从而有 $G\subset\bigcup\{I:I\in\Gamma\}$，所以 $G=\bigcup\{I:I\in\Gamma\}$.

对 $\Gamma$ 中的任意两个左开正方形 $I,J$，若 $I\cap J\neq\varnothing$，则必有：$I\subset J$ 或 $I\supset J$，令

$$\Gamma_0=\{I\in\Gamma:\text{存在 }J\in\Gamma\text{，使 }I\text{ 是 }J\text{ 的真子集}\},\Gamma_1=\Gamma\setminus\Gamma_0.$$

则有 $G=\bigcup\{I:I\in\Gamma_1\}$. 因为 $\Gamma_1$ 中的元是互不相交的，于是开集 $G$ 是至多可数个互不相交的左开正方形之并. 再注意到有限个左开正方形之并不是开集，所以 $G$ 必定是可数个互不相交的左开正方形之并.

## 2.3 闭集与极限点

**定义 2.3.1** 设 $F\subset\mathbf{R}^n$. 若 $F^c=\mathbf{R}^n\setminus F$ 是开集，则称 $F$ 是**闭集**.

**例 2.3.1** 直线 $\mathbf{R}^1$ 中的闭区间是闭集，空间 $\mathbf{R}^n$ 中的闭球和闭矩体都是闭集.

**引理 2.3.1** 设 $F\subset\mathbf{R}^n$，则 $F$ 是闭集当且仅当：对任意 $x\notin F$，存在 $\delta>0$，使 $B(x,\delta)\cap F=\varnothing$.

**证** $F$ 是闭集 $\Leftrightarrow F^c=\mathbf{R}^n\setminus F$ 是开集

$\Leftrightarrow$ 任意 $x\in F^c$，存在 $\delta>0$，使 $B(x,\delta)\subset F^c$

$\Leftrightarrow$ 任意 $x\notin F$，存在 $\delta>0$，使 $B(x,\delta)\cap F=\varnothing$.

**定理 2.3.2** 关于闭集有如下性质：

(1) $\varnothing$ 与 $\mathbf{R}^n$ 是闭集；

(2) 有限个闭集的并集是闭集；

(3) 任意个闭集的交集是闭集.

**证** 由定义 2.3.1 和定理 2.2.2 即得.

**定义 2.3.2** 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，$x\in\mathbf{R}^n$. 若对任意 $\delta>0$，有 $(B(x,\delta)\setminus\{x\})\cap E\neq\varnothing$，则称点 $x$ 为 $E$ 的**极限点**. $E$ 的极限点的全体称为 $E$ 的**导集**，记为 $E'$. 称并集 $E\cup E'$ 为 $E$ 的**闭包**，记为 $\overline{E}$（或 $E^-$）.

对任意 $E\subset\mathbf{R}^n$，显然有 $E\subset\overline{E}$.

**例 2.3.2** 在 $\mathbf{R}^1$ 中，$(a,b)'=[a,b]$，$[a,b)'=[a,b]$，$\overline{\mathbf{Q}}=\mathbf{R}$，$\overline{(a,b)\cap\mathbf{Q}}=[a,b]$.

**定理 2.3.3** 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，则下列条件等价：

(1) $x\in E'$；

(2) 对任意 $\delta>0$，$B(x,\delta)\cap E$ 为无限集；

(3) 存在 $E$ 中的互异点列 $\{x_k\}$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=x$.

**证** (1)⇒(2)：(反证法)若存在 $\delta>0$，使 $B(x,\delta)\cap E$ 为有限集. 因为 $x\in E'$，可以知道 $(B(x,\delta)\setminus\{x\})\cap E\neq\varnothing$，令

$$r=\min\{|x-y|:y\in(B(x,\delta)\setminus\{x\})\cap E\}.$$

由于 $(B(x,\delta)\setminus\{x\})\cap E$ 为不包含 $x$ 的有限集，故 $r>0$. 由此导致 $(B(x,r)\setminus\{x\})\cap E=\varnothing$，此与 $x\in E'$ 矛盾.

(2)⇒(3)：先取 $x_1\in B(x,1)\cap E$，再取 $x_2\in\left(B\left(x,\frac{1}{2}\right)\cap E\right)\setminus\{x_1\}$. 以此类推，取得 $x_k\in\left(B\left(x,\frac{1}{k}\right)\cap E\right)\setminus\{x_1,x_2,\cdots,x_{k-1}\}$，$k=1,2,3,\cdots$则易知 $\{x_k\}$ 为 $E$ 中的互异点列，且有 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=x$.

(3)⇒(1)：设有 $E$ 中的互异点列 $\{x_k\}$，使 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=x$，则对任意 $\delta>0$，存在 $k_0\in\mathbf{N}$，当 $k\geqslant k_0$ 时，有 $|x_k-x|<\delta$. 取 $k\geqslant k_0$ 且 $x_k\neq x$，则 $(B(x,\delta)\setminus\{x\})\cap E\supset\{x_k\}\neq\varnothing$. 所以有 $x\in E'$.

**引理 2.3.4** 设 $E_1,E_2\subset\mathbf{R}^n$，则

(1) $E_1\subset E_2\Rightarrow E_1'\subset E_2'$；

(2) $(E_1\cup E_2)'=E_1'\cup E_2'$.

**证** (1) 显然.

(2) 由(1)可知 $E'_1\subset(E_1\cup E_2)'$，$E_2'\subset(E_1\cup E_2)'$，故 $E_1'\cup E_2'\subset(E_1\cup E_2)'$. 另一方面，若 $x\notin E_1'\cup E_2'$，即 $x\notin E_1'$ 且 $x\notin E_2'$，故存在 $\delta_1>0$，使 $B(x,\delta_1)\cap E_1$ 为有限集；又存在 $\delta_2>0$，使 $B(x,\delta_2)\cap E_2$ 为有限集. 令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则 $B(x,\delta)\cap(E_1\cup E_2)$ 为有限集. 所以 $x\notin(E_1\cup E_2)'$，从而可得 $(E_1\cup E_2)'\subset E_1'\cup E_2'$.

**定理 2.3.5** 设 $F\subset\mathbf{R}^n$，则下列条件等价：

(1) $F$ 是闭集；(2) $F'\subset F$；(3) $F=\overline{F}$；(4) 若 $F$ 中的点列 $\{x_k\}$ 收敛于 $x$，则 $x\in F$.

**证** (1)⇒(2)：设 $F$ 是闭集，若 $x\notin F$，由引理 2.3.1 知存在 $\delta>0$，使 $B(x,\delta)\cap F=\varnothing$. 再由定理 2.3.3 知 $x\notin F'$，所以有 $F'\subset F$.

(2)⇒(3)：$\overline{F}=F\cup F'=F$.

(3)⇒(4)：设 $F$ 中的点列 $\{x_k\}$ 收敛于 $x$，若 $x\notin F$，由 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=x$，可知对任意 $\delta>0$，存在 $k_0\in\mathbf{N}$，当 $k\geqslant k_0$ 时，有 $|x_k-x|<\delta$，于是有 $(B(x,\delta)\setminus\{x\})\cap F\supset\{x_k\}\neq\varnothing$，从而可得 $x\in F'\subset\overline{F}=F$，得到矛盾，所以必有 $x\in F$.

(4) ⇒(1):若 $F$ 不是闭集,由引理 2.3.1 知,存在 $x\notin F$,使对任意的 $\delta>0$,有 $B(x,\delta)\cap F\neq\varnothing$. 取 $x_k\in B\left(x,\frac{1}{k}\right)\cap F(k=1,2,3,\cdots)$,得到 $F$ 中的点列 $\{x_k\}$,显然有 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$,由(4)知 $x\in F$,得矛盾.

**命题 2.3.6** 任意集 $E\subset\mathbf{R}^n$,则 $E'$ 与 $\overline{E}$ 皆为闭集.

**证** 设 $x\in(E')'$,对任意 $\delta>0$,因为 $B(x,\delta)\cap E'\neq\varnothing$,取点 $y\in B(x,\delta)\cap E'$,再取 $r>0$,使 $B(y,r)\subset B(x,\delta)$. 由 $y\in E'$ 以及定理 2.3.3,可知 $B(y,r)\cap E$ 为无限集,从而可得 $B(x,\delta)\cap E$ 为无限集. 所以再由定理 2.3.3 知 $x\in E'$,从而有 $(E')'\subset E'$,由定理 2.3.5 知 $E'$ 是闭集.

再由 $(\overline{E})'=(E\cup E')'=E'\cup(E')'=E'\subset\overline{E}$,知 $\overline{E}$ 是闭集.

**命题 2.3.7** 设 $E_1,E_2\subset\mathbf{R}^n$,则

(1) $E_1\subset E_2\Rightarrow\overline{E_1}\subset\overline{E_2}$;

(2) $\overline{E_1\cup E_2}=\overline{E_1}\cup\overline{E_2}$;

(3) $(\overline{E})^-=\overline{E}$.

**证** (1) 显然.

(2) 
$$\begin{aligned}\overline{E_1\cup E_2}&=(E_1\cup E_2)\cup(E_1\cup E_2)'=(E_1\cup E_2)\cup(E_1{}'\cup E_2{}')\\&=(E_1\cup E_1{}')\cup(E_2\cup E_2{}')=\overline{E_1}\cup\overline{E_2}\end{aligned}$$

(3) 由命题 2.3.6 知 $\overline{E}$ 是闭集,再由定理 2.3.5 知 $(\overline{E})^-=\overline{E}$.

**例 2.3.3** 设 $F$ 为 $\mathbf{R}^1$ 中的有界闭集,记 $a=\inf F,b=\sup F$,则 $a,b\in F$.

**证** 在 $F$ 中取点列 $\{x_k\}$,使 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=a$,由定理 2.3.5 知 $a\in F$. 同理有 $b\in F$.

**例 2.3.4** 设 $A,B\subset\mathbf{R}^n$,则 $\overline{A}\setminus\overline{B}\subset\overline{A\setminus B}$.

**证** $\overline{A}\setminus\overline{B}\subset\overline{A\cup B}\setminus\overline{B}=\overline{B\cup(A\setminus B)}\setminus\overline{B}=\left(\overline{B}\cup\overline{(A\setminus B)}\right)\setminus\overline{B}\subset\overline{A\setminus B}$.

**命题 2.3.8** 设 $E\subset\mathbf{R}^n$,证明:$E^\circ=E^{c-c}$. 这里,$E^{c-c}$ 表示 $((E^c)^-)^c$,即 $E$ 的余集的闭包的余集.

**证** 
$$\begin{aligned}x\in E^\circ&\Leftrightarrow \text{存在 }\delta>0,\text{使 }B(x,\delta)\subset E\Leftrightarrow \text{存在 }\delta>0,\text{使 }E^c\cap B(x,\delta)=\varnothing\\&\Leftrightarrow x\notin E^{c-}\Leftrightarrow x\in E^{c-c}.\end{aligned}$$

注意,本题还可改述为:$E^{\circ c}=E^{c-}$,或 $E^-=E^{c\circ c}$,或 $E^{-c}=E^{c\circ}$.

**例 2.3.5** 直线 $\mathbf{R}^1$ 上既开又闭的集合仅有空集 $\varnothing$ 与 $\mathbf{R}^1$.

**证** 设集合 $A$ 为直线 $\mathbf{R}^1$ 上既开又闭的非空真子集. 由开集的构造定理,$A$ 为

它的构成区间之并，$A=\bigcup_k(a_k,b_k)$. 因 $A\neq\mathbf{R}^1$，故存在 $k$ 使 $(a_k,b_k)\neq\mathbf{R}^1$. 不妨设 $-\infty<a_k<+\infty$，由 $A$ 为闭集知 $a_k\in(a_k,b_k)'\subset A'\subset A$. 另一方面，因 $(a_k,b_k)$ 是开集 $A$ 的构成区间，故 $a_k\notin A$，得矛盾. 所以直线 $\mathbf{R}^1$ 上不存在既开又闭的非空真子集.

**定义 2.3.3** 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，若 $x\in E\setminus E'$，则称点 $x$ 是 $E$ 的**孤立点**.

不难知道，$x$ 是 $E$ 的孤立点当且仅当：存在 $\delta>0$，使 $B(x,\delta)\cap E=\{x\}$.

**定义 2.3.4** 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，若 $E$ 是可数个闭集的并集，则称 $E$ 为 $F_\sigma$ **集**；若 $E$ 是可数个开集的交集，则称 $E$ 为 $G_\delta$ **集**.

显然：$E$ 为 $F_\sigma$ 集 $\Leftrightarrow E^c$ 为 $G_\delta$ 集. 通常还称一个集合为 $F_{\sigma\delta}$ 集，若它可以表示成可数个 $F_\sigma$ 集的交；称一个集合为 $G_{\delta\sigma}$ 集，若它可以表示成可数个 $G_\delta$ 集的并.

**例 2.3.6** 有理数集 $\mathbf{Q}$ 是 $F_\sigma$ 集，无理数集 $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ 是 $G_\delta$ 集.

**证** 有理数集是可数集，记 $\mathbf{Q}=\{r_1,r_2,\cdots,r_k,\cdots\}$，则 $\mathbf{Q}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{r_k\}$，而每个单点集 $\{r_k\}$ 是闭集，所以有理数集 $\mathbf{Q}$ 是 $F_\sigma$ 集，从而可得无理数集 $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ 是 $G_\delta$ 集.

**定义 2.3.5** 设 $X$ 为一个集合，$\Omega$ 为 $X$ 的一些子集所组成的集族，它满足下述条件：

(i) $\varnothing\in\Omega$；

(ii) 若 $A\in\Omega$，则 $A^c\in\Omega$；

(iii) 若 $A_n\in\Omega, n=1,2,\cdots$，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\Omega$.

那么我们称 $\Omega$ 是 $X$ 上的一个 **$\sigma$-代数**.

可以证明对于 $X$ 的任一个子集族 $\Gamma$ 总存在一个包含 $\Gamma$ 的最小的 $\sigma$-代数 $\Omega$. 我们称这个 $\sigma$-代数 $\Omega$ 是由 $\Gamma$ 生成的 $\sigma$-代数.

**定义 2.3.6** 由 $\mathbf{R}^n$ 中所有开集组成的开集族所生成的 $\sigma$-代数，称为 Borel $\sigma$-代数，其中的元称为 **Borel 集**.

容易看到：$\mathbf{R}^n$ 中的闭集、开集、$F_\sigma$ 集、$G_\delta$ 集、$F_{\sigma\delta}$ 集、$G_{\delta\sigma}$ 集等都是 Borel 集.

## 2.4 闭集套定理与覆盖定理

**引理 2.4.1** 设 $\{x_k\}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的有界点列，则 $\{x_k\}$ 必有收敛子列.

**证** 以 $\mathbf{R}^2$ 的情况来证明. 设 $x_k=(a_k,b_k)(k=1,2,3,\cdots)$，因为 $\{a_k\}$ 是 $\mathbf{R}^1$ 中的有界点列，故存在收敛子列 $\{a_{k_i}\}$. 又因为 $\{b_{k_i}\}$ 是 $\mathbf{R}^1$ 中的有界点列，故存在收敛子

列$\{b_{k_{i_j}}\}$. 这时$\{a_{k_{i_j}}\}$仍收敛. 于是$\{x_k\}$存在收敛子列$\{x_{k_{i_j}}\}$. 若把上述证明推广到 $\mathbf{R}^n$ 的情况,并无本质上的困难.

**定理 2.4.2** 设 $E$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界无限集,则 $E$ 至少有一个极限点.

**证** 因为 $E$ 是无限集,在 $E$ 中可取出互异点列$\{x_k\}$,再由引理 2.4.1 知有界点列$\{x_k\}$存在收敛子列$\{x_{k_i}\}$,设$\lim\limits_{i\to\infty}x_{k_i}=x$,则 $x\in E'$.

**定理 2.4.3(Cantor 闭集套定理)** 若$\{F_k\}$是 $\mathbf{R}^n$ 中的非空有界递减闭集列:$F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_k\supset\cdots$,则$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}F_k\neq\varnothing$.

**证** 取 $x_k\in F_k(k=1,2,3,\cdots)$. 显然,每个 $x_k$都属于有界集 $F_1$. 由引理 2.4.1 知有界点列$\{x_k\}$存在收敛子列$\{x_{k_i}\}$,设$\lim\limits_{i\to\infty}x_{k_i}=x$. 对每个 $k$,当 $k_i>k$ 时,有 $x_{k_i}\in F_{k_i}\subset F_k$. 因为 $F_k$ 是闭集,由定理 2.3.5 知 $x\in F_k$,所以有 $x\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}F_k$,即$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}F_k\neq\varnothing$.

**定义 2.4.1** 设 $E\subset\mathbf{R}^n$,若 $\Gamma=\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开集族,且有 $E\subset\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$,则称 $\Gamma$ 是 $E$ 的一个**开覆盖**. 当 $\Gamma$ 是可数集或有限集时,分别称 $\Gamma$ 为**可数开覆盖**或**有限开覆盖**.

设 $\Gamma$ 是 $E$ 的一个开覆盖,若 $\Gamma$ 的子族 $\Gamma_0$ 仍是 $E$ 的开覆盖,则称 $\Gamma_0$ 是 $\Gamma$ 的一个**子覆盖**.

**定理 2.4.4(可数覆盖定理)** $\mathbf{R}^n$ 中点集 $E$ 的任一开覆盖均含一个可数子覆盖.

**证** 设 $\Gamma=\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$是 $E$ 的开覆盖,对每个 $x\in E$,存在 $\lambda_x\in\Lambda$ 使 $x\in G_{\lambda_x}$,取 $y_x\in\mathbf{Q}^n$ 及有理数 $r_x>0$,使 $x\in B(y_x,r_x)\subset G_{\lambda_x}$. 因为$\{B(y_x,r_x):x\in E\}$为至多可数的,不妨重新改记为$\{B_1,B_2,\cdots,B_k,\cdots\}$. 对每个 $k$,取 $\lambda_k\in\Lambda$ 使 $B_k\subset G_{\lambda_k}$,则 $\Gamma_0=\{G_{\lambda_1},G_{\lambda_2},\cdots,G_{\lambda_k},\cdots\}$即为 $\Gamma$ 的可数子覆盖.

**定理 2.4.5(有限覆盖定理)** $\mathbf{R}^n$ 中有界闭集 $E$ 的任一开覆盖均含一个有限子覆盖.

**证** 设 $\Gamma$ 是有界闭集 $E$ 的一个开覆盖,由定理 2.4.4,不妨设 $\Gamma=\{G_1,G_2,\cdots,G_k,\cdots\}$,令

$$H_k=\bigcup_{i=1}^{k}G_i,F_k=E\setminus H_k(k=1,2,3,\cdots).\tag{2.5}$$

若开覆盖 $\Gamma$ 不存在有限子覆盖,则$\{F_k\}$为非空有界递减闭集列. 因为 $E\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}G_k\subset$

$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} H_k$,故$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}(E\cap H_k^c)=E\cap(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} H_k^c)=E\cap(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} H_k)^c=\varnothing$. 此与闭集套定理矛盾,所以开覆盖 $\Gamma$ 存在有限子覆盖.

**定义 2.4.2** 设 $E\subset\mathbf{R}^n$,若 $E$ 的任一开覆盖均含一个有限子覆盖,则称 $E$ 是**紧集**.

**定理 2.4.6** 设 $E\subset\mathbf{R}^n$,则 $E$ 是紧集当且仅当:$E$ 是有界闭集.

**证** 充分性由有限覆盖定理可知. 下面证明必要性.

设 $E$ 是紧集. 因$\{B(0,k):k\in\mathbf{N}\}$是 $E$ 的开覆盖,存在有限子覆盖,不妨设为$\{B(0,k):k=1,2,\cdots,l\}$,则 $E\subset B(0,l)$,所以 $E$ 是有界集.

若 $x\notin E$,对 $r>0$,令 $H(x,r)=\{y\in\mathbf{R}^n:|x-y|>r\}$,则$\{H(x,r):r>0\}$是 $E$ 的开覆盖,存在有限子覆盖$\{H(x,r_1),H(x,r_2),\cdots,H(x,r_k)\}$. 令 $\delta=\min\{r_1,r_2,\cdots,r_k\}$,则 $B(x,\delta)\cap E=\varnothing$,由引理 2.3.1,知 $E$ 是闭集.

## 2.5 函数连续性

**定义 2.5.1** 设 $f(x)$是 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的实值函数,$x_0\in E$. 若对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $x\in E\cap B(x_0,\delta)$时,有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,则称 $f(x)$在点 $x_0$处**连续**,称 $x_0$为 $f(x)$的一个**连续点**. 若 $f(x)$在集 $E$ 的每一个点处连续,称 $f(x)$在集 $E$ 上连续. 将 $E$ 上连续函数的全体记为$C(E)$.

**定理 2.5.1** 设 $E\subset\mathbf{R}^n$,函数 $f:E\to\mathbf{R}$. 则下列条件等价:

(a) $f$ 在 $E$ 上连续;

(b) 对任意开集 $S\subset\mathbf{R}$,存在开集 $G\subset\mathbf{R}^n$,使 $f^{-1}(S)=E\cap G$;

(c) 对任意闭集 $T\subset\mathbf{R}$,存在闭集 $F\subset\mathbf{R}^n$,使 $f^{-1}(T)=E\cap F$.

**证** (a)⇒(b):设 $f$ 在 $E$ 上连续,开集 $S\subset\mathbf{R}$,对每个 $x\in f^{-1}(S)$,则 $f(x)\in S$,因 $S$ 是开集,故存在 $\varepsilon>0$ 使$(f(x)-\varepsilon,f(x)+\varepsilon)\subset S$. 由 $f$ 连续,存在 $\delta_x>0$ 使

$$f\big(E\cap B(x,\delta_x)\big)\subset(f(x)-\varepsilon,f(x)+\varepsilon)\subset S.$$

令 $G=\bigcup\{B(x,\delta_x):x\in f^{-1}(S)\}$,则有

$$f^{-1}(S)=E\cap G. \tag{2.6}$$

事实上,由 $f^{-1}(S)\subset E$ 及 $f^{-1}(S)\subset G$,知 $f^{-1}(S)\subset E\cap G$. 另一方面因为

$$E\cap G=\bigcup\{E\cap B(x,\delta_x):x\in f^{-1}(S)\},$$

对指标集 $f^{-1}(S)$中每个 $x$,有 $f\big(E\cap B(x,\delta_x)\big)\subset S$,故 $E\cap B(x,\delta_x)\subset f^{-1}(S)$,从而有 $E\cap G\subset f^{-1}(S)$. 合之有 $f^{-1}(S)=E\cap G$.

$(b)\Rightarrow(a)$:设 $x\in E$,对任意 $\varepsilon>0$,令开集 $S=(f(x)-\varepsilon,f(x)+\varepsilon)$,则由$(b)$存在开集 $G\subset\mathbf{R}^n$,使 $f^{-1}(S)=E\cap G$. 因 $x\in f^{-1}(S)=E\cap G$ 以及 $G$ 为开集,故存在 $\delta>0$ 使 $B(x,\delta)\subset G$,则 $f(E\cap B(x,\delta))\subset f(E\cap G)=f(f^{-1}(S))\subset S$. 所以 $f$ 在点 $x$ 处连续,从而知 $f$ 在 $E$ 上连续.

$(b)\Leftrightarrow(c)$:利用 $f^{-1}(\mathbf{R}\backslash A)=E\backslash f^{-1}(A)$即得.

**推论 2.5.2** 设 $E\subset\mathbf{R}^n$,函数 $f:E\to\mathbf{R}$. 考虑下述条件:$(a)$ $f$ 在 $E$ 上连续;$(b)$ 对任意开集 $S\subset\mathbf{R}$,$f^{-1}(S)$为 $\mathbf{R}^n$ 中开集;$(c)$ 对任意闭集 $T\subset\mathbf{R}$,$f^{-1}(T)$为 $\mathbf{R}^n$ 中闭集. 则有:

(1) 若 $E$ 为开集,有$(a)\Leftrightarrow(b)$;

(2) 若 $E$ 为闭集,有$(a)\Leftrightarrow(c)$;

(3) 若 $E=\mathbf{R}^n$,有$(a)\Leftrightarrow(b)\Leftrightarrow(c)$.

**证** (1) 若 $E$ 为开集. 设 $f$ 在 $E$ 上连续,则对任意开集 $S\subset\mathbf{R}$,由定理 2.5.1 知存在开集 $G\subset\mathbf{R}^n$,使 $f^{-1}(S)=E\cap G$,故 $f^{-1}(S)$为 $\mathbf{R}^n$ 中开集. 反之,对任意开集 $S\subset\mathbf{R}$,$f^{-1}(S)$为 $\mathbf{R}^n$ 中开集,则 $f^{-1}(S)=E\cap f^{-1}(S)$,由定理 2.5.1 知 $f$ 在 $E$ 上连续.

(2) 若 $E$ 为闭集. 设 $f$ 在 $E$ 上连续,则对任意闭集 $T\subset\mathbf{R}$,由定理 2.5.1 知存在闭集 $F\subset\mathbf{R}^n$,使 $f^{-1}(T)=E\cap F$,故 $f^{-1}(T)$为 $\mathbf{R}^n$ 中闭集. 反之,对任意闭集 $T\subset\mathbf{R}$,$f^{-1}(T)$为 $\mathbf{R}^n$ 中闭集,则 $f^{-1}(T)=E\cap f^{-1}(T)$,由定理 2.5.1 知 $f$ 在 $E$ 上连续.

(3) 因为 $\mathbf{R}^n$ 是既开又闭的集合,由(1)与(2)即得.

**定义 2.5.2** 设 $E\subset\mathbf{R}^n$,函数 $f:E\to\mathbf{R}$. 称 $\mathrm{supp}(f)=\overline{\{x\in E:f(x)\neq0\}}$ 为$f(x)$的**支集**. 若 $f(x)$的支集是紧集,称 $f(x)$是具有**紧支集**的函数.

因为一个集合是紧集当且仅当:它是有界闭集,又因为集合的闭包总是闭集,所以 $f(x)$的支集是紧集当且仅当:支集是有界集.

在数学分析中可知,闭区间上的连续函数具有比较好的性质,现在有如下推广.

**命题 2.5.3** 设 $f(x)$是 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的连续函数,若 $E$ 是紧集,则

(1) $f(x)$是 $E$ 上的有界函数;

(2) $f(x)$在 $E$ 上可以取到最大值与最小值;

(3) $f(x)$是 $E$ 上的一致连续函数.

**命题 2.5.4** 设 $f(x)$是 $\mathbf{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数,则

(1) $f(x)$是 $\mathbf{R}^n$ 上的有界函数;

(2) $f(x)$在 $\mathbf{R}^n$ 上可以取到最大值与最小值;

(3) $f(x)$是 $\mathbf{R}^n$ 上的一致连续函数.

**定义 2.5.3** 设函数 $f(x)$在点 $x_0\in\mathbf{R}^n$ 的某个球邻域内有定义,令

$$\omega(x_0)=\lim_{\delta\to 0}\sup\{|f(s)-f(t)|:s,t\in B(x_0,\delta)\}. \tag{2.7}$$

称 $\omega(x_0)$为 $f(x)$在点 $x_0$ 处的**振幅**. 称 $\omega(x)$为 $f(x)$的**振幅函数**.

**命题 2.5.5** 若 $f(x)$是定义在开集 $G$ 上的函数,而 $\omega(x)$为 $f(x)$的振幅函数,则集合$\{x\in G:\omega(x)=0\}$是 $G_\delta$ 集.

**证** 先证明:对任意的自然数 $k$,集 $H_k=\left\{x\in G:\omega(x)<\dfrac{1}{k}\right\}$是开集.

设 $x_0\in H_k$,因为 $\omega(x_0)<1/k$,存在 $\delta_0>0$,使 $B(x_0,\delta_0)\subset G$,且

$$\sup\{|f(s)-f(t)|:s,t\in B(x_0,\delta_0)\}<1/k.$$

对于任意 $y\in B(x_0,\delta_0)$,取 $r>0$ 使 $B(y,r)\subset B(x_0,\delta_0)$,显然有

$$\sup\{|f(s)-f(t)|:s,t\in B(y,r)\}<1/k.$$

从而可得 $\omega(y)<1/k$,即有 $B(x_0,\delta_0)\subset H_k$,所以 $H_k$ 是开集.

再由$\{x\in G:\omega(x)=0\}=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}H_k$,知$\{x\in G:\omega(x)=0\}$是 $G_\delta$ 集.

**命题 2.5.6** 若 $f(x)$是定义在开集 $G$ 上的函数,则 $f(x)$的连续点集是 $G_\delta$ 集.

**证** 由数学分析的知识,可以知道:$f(x)$在点 $x$ 连续$\Leftrightarrow\omega(x)=0$. 再由命题 2.5.5 可立得结论.

## 2.6 点集间的距离

**定义 2.6.1** 设 $A,B$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的点集,记 $d(A,B)=\inf\{|a-b|:a\in A,b\in B\}$,称 $d(A,B)$为**集 $A$ 与 $B$ 之间的距离**;记 $d(x,B)=d(\{x\},B)$,并称 $d(x,B)$为**点 $x$ 到 $B$ 的距离**.

**定理 2.6.1** 设 $A,B$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的非空闭集，且至少一个为有界集，则存在 $a\in A,b\in B$，使 $|a-b|=d(A,B)$.

**证** 不妨设 $A\cap B=\varnothing$ 及 $A$ 为有界集. 在 $A$ 中取点列 $\{a_k\}$，在 $B$ 中取点列 $\{b_k\}$，使 $|a_k-b_k|\to d(A,B)$，且不妨设 $|a_k-b_k|\leqslant M(k=1,2,3,\cdots)$. 再在 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ 中取点列

$$x_k=(a_k,b_k)(k=1,2,3,\cdots).$$

因为 $A$ 是有界集以及 $|b_k|\leqslant|a_k-b_k|+|a_k|\leqslant M+|a_k|$，知 $\{a_k\}$ 和 $\{b_k\}$ 都是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界点列，从而可得 $\{x_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ 中的有界点列. 再由引理 2.4.1 可知 $\{x_k\}$ 存在收敛子列 $\{x_{k_i}\}$，设 $x_{k_i}=(a_{k_i},b_{k_i})\to(a,b)$，则有 $|a-b|=\lim\limits_{i\to\infty}|a_{k_i}-b_{k_i}|=d(A,B)$.

因为 $A,B$ 是闭集以及 $a_{k_i}\to a,b_{k_i}\to b$，由定理 2.3.5 知 $a\in A,b\in B$.

**推论 2.6.2** 若 $F\subset\mathbf{R}^n$ 是非空闭集，$x\in\mathbf{R}^n$，则存在 $y\in F$，使 $|x-y|=d(x,F)$.

**推论 2.6.3** 设 $A,B$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的非空闭集，且至少一个为有界集，若 $A\cap B=\varnothing$，则有 $d(A,B)>0$.

设 $A,B$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的非空闭集，若 $A\cap B\neq\varnothing$，则显然有 $d(A,B)=0$；但反之不然，即存在 $\mathbf{R}^n$ 中的非空闭集 $A,B$，使 $d(A,B)=0$ 且 $A\cap B=\varnothing$.

**例 2.6.1** 在 $\mathbf{R}^2$ 中，令 $A=\{0\}\times\mathbf{R}^1$，$B=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:xy=1\}$，则 $A,B$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的非空闭集，且 $d(A,B)=0$ 及 $A\cap B=\varnothing$.

**定理 2.6.4** 设 $E$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的非空集，则函数 $f(x)=d(x,E)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上是一致连续的.

**证** 设 $x,y\in\mathbf{R}^n$，对任意的 $z\in E$，有 $d(x,E)\leqslant|x-z|\leqslant|x-y|+|y-z|$. 由 $z$ 的任意性，有 $d(x,E)\leqslant|x-y|+\inf\{|y-z|:z\in E\}=|x-y|+d(y,E)$.

同理，有 $d(y,E)\leqslant|x-y|+d(x,E)$. 合之有

$$|f(x)-f(y)|=|d(x,E)-d(y,E)|\leqslant|x-y|.$$

所以函数 $f(x)=d(x,E)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上是一致连续的.

**例 2.6.2** 设非空集 $E\subset\mathbf{R}^n$，则对任意的 $t>0$，$\{x\in\mathbf{R}^n:d(x,E)<t\}$ 是开集，$\{x\in\mathbf{R}^n:d(x,E)\leqslant t\}$ 是闭集.

**证** 因为函数 $f(x)=d(x,E)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上是连续的，以及

$\{x\in\mathbf{R}^n:d(x,E)<t\}=f^{-1}((-\infty,t))$，$\{x\in\mathbf{R}^n:d(x,E)\leqslant t\}=f^{-1}((-\infty,t])$.

由推论 2.5.2 即得.

**定理 2.6.5** 设 $A,B$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中互不相交的非空闭集，则存在连续函数 $f:\mathbf{R}^n\to[0,1]$，使当 $x\in A$ 时 $f(x)=0$；当 $x\in B$ 时 $f(x)=1$.

**证** 令 $f(x)=\dfrac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$，即得所求函数.

作为练习，读者可由定理 2.6.5 推出下述推论.

**推论 2.6.6** 设 $A,B$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中互不相交的非空闭集，则对任意的 $s,t\in\mathbf{R}^1$ $(s<t)$，存在连续函数 $f:\mathbf{R}^n\to[s,t]$，使当 $x\in A$ 时 $f(x)=s$；当 $x\in B$ 时 $f(x)=t$.

下面关于连续函数的延拓定理常称为 Tietze 延拓定理.

**定理 2.6.7(Tietze 延拓定理)** 设 $F$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的闭集，$f(x)$ 是定义在 $F$ 上的连续函数，且 $|f(x)|\leqslant M$，$x\in F$，则存在 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数 $g(x)$，满足

$$g(x)=f(x),\ x\in F \text{ 及 } |g(x)|\leqslant M,\ x\in\mathbf{R}^n. \tag{2.8}$$

**证** 不妨设 $M>0$，显然，$f^{-1}\left(\left[-M,-\frac{1}{3}M\right]\right)$ 和 $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{3}M,M\right]\right)$ 为不相交的闭集. 倘上述两个闭集均为非空集，则由推论 2.6.6 知，存在 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数 $g_1:\mathbf{R}^n\to\left[-\frac{1}{3}M,\frac{1}{3}M\right]$ 使 $g_1$ 在 $f^{-1}\left(\left[-M,-\frac{1}{3}M\right]\right)$ 上恒取 $-\frac{1}{3}M$，在 $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{3}M,M\right]\right)$ 上恒取 $\frac{1}{3}M$. 这时有

$$|g_1(x)|\leqslant\frac{1}{3}M,\ x\in\mathbf{R}^n;\ \text{及}\ |f(x)-g_1(x)|\leqslant\frac{2}{3}M,\ x\in\mathbf{F}.$$

倘上述两个闭集中至少有一个为空集. 比如，设 $f^{-1}\left(\left[-M,-\frac{1}{3}M\right]\right)=\varnothing$，则可取 $g_1(x)\equiv\frac{1}{3}M$，易知 $g_1(x)$ 也满足上述不等式.

对函数 $f(x)-g_1(x)$ 继续上述工作，存在 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数 $g_2(x)$，使

$$|g_2(x)|\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}M\right),\ x\in\mathbf{R}^n,\ \text{及}\ |(f(x)-g_1(x))-g_2(x)|\leqslant\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}M\right),\ x\in F.$$

一直继续下去，得 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数列 $\{g_k(x)\}$，使对每个 $k$ 有

$$|g_k(x)|\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}M,\ x\in\mathbf{R}^n,\ \text{及}\ \left|f(x)-\sum_{i=1}^{k}g_i(x)\right|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{k}M,\ x\in F.$$

于是级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}g_i(x)$ 为一致收敛，故其和函数 $g(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}g_i(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数. 且

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}g_i(x)=g(x),x\in F.$$

最后,对任意的 $x\in\mathbf{R}^n$,有

$$|g(x)|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|g_k(x)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}M=M.$$

**推论 2.6.8** 若 $F$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的闭集,$f(x)$是定义在 $F$ 上的连续函数,则存在 $\mathbf{R}^n$ 上的一个连续函数 $g(x)$,满足 $g(x)=f(x),x\in F$.

**证** 令 $u(x)=\arctan f(x)$,则 $u(x)$是定义在 $F$ 上的有界连续函数,由定理 2.6.7 可得存在 $\mathbf{R}^n$ 上的一个连续函数 $v(x)$,满足 $u(x)=v(x),x\in F$. 再令

$$g(x)=\tan(v(x)),$$

则 $g(x)$是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个连续函数,且满足 $g(x)=f(x),x\in F$.

## 2.7 Cantor 集

Cantor 集是本课程中一个重要的例子. 下面先在 $\mathbf{R}^1$ 中给出 Cantor 集的构造.

**Cantor 集的构造**第一步,把闭区间[0,1]三等分,挖去中间的开区间$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$,剩下两个闭区间$\left[0,\frac{1}{3}\right]$与$\left[\frac{2}{3},1\right]$,记这两个闭区间之并为 $F_1$. 第二步,再把这两个闭区间各三等分,各挖去中间的两个开区间$\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$与$\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$,记剩下的四个闭区间之并为 $F_2$. 一般地,当进行到第 $n$ 步时,剩下 $2^n$ 个长度是 $3^{-n}$的互不相交的闭区间,记这些闭区间之并为 $F_n$. 这样继续下去,于是在[0,1]中挖去可数个互不相交的开区间,而剩下来的点所成之集 $C$ 称为 **Cantor 集**,这时显然有 $C=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$.

**命题 2.7.1** Cantor 集 $C$ 是非空有界闭集.

**证** 因为每个 $F_n$ 是闭集及闭集的任意交仍为闭集,知 $C=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$ 是闭集. 再因为$\{F_k\}$是非空有界递减闭集列,由闭集套定理,知 $C=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\neq\varnothing$.

**命题 2.7.2** $C=C'$(这时称 $C$ 为完备集).

**证** 设 $x\in C$,对任意的 $r>0$,取 $n$ 使 $3^{-n}<r$. 因为 $x\in F_n$,而 $F_n$ 是一些长度为 $3^{-n}$的闭区间之并,记其中含 $x$ 的闭区间为$[a,b]$,显然有$[a,b]\subset(x-r,x+r)$. 由 $C$ 的构造知 $a,b\in C$,在 $a$ 与 $b$ 中至少有一个点不是 $x$,所以$((x-r,x+r)\setminus\{x\})\cap$

$C\neq\varnothing$,即有 $x\in C'$,所以 $C\subset C'$.

再因 $C$ 是闭集,故有 $C\supset C'$. 合之,有 $C=C'$.

**命题 2.7.3** Cantor 集 $C$ 没有内点.

**证** 对任一开区间 $(a,b)$,因为 $F_n$ 是一些长度为 $3^{-n}$ 的互不相交的闭区间之并,当 $3^{-n}<b-a$ 时,不能有 $(a,b)\subset F_n$,当然更不能有 $(a,b)\subset C$. 所以 $C$ 中不含任何开区间,即没有内点.

**命题 2.7.4** Cantor 集 $C$ 具连续基数 $c$.

**证** 在用 3 进位小数表示 $[0,1]$ 中的点时,则 Cantor 集 $C$ 中的点恰好不含数字 1,即

$$C=\{0.x_1x_2x_3\cdots,x_k\cdots:x_k\in\{0,2\},k=1,2,3,\cdots\}.$$

记 $E=\{(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots):x_k\in\{0,1\},k=1,2,3,\cdots\}$. 对 $x=0.x_1x_2x_3\cdots,x_k\cdots\in C$,令

$$f(x)=\left(\frac{x_1}{2},\frac{x_2}{2},\cdots,\frac{x_k}{2},\cdots\right).$$

则 $f:C\to E$ 是一个双射. 再由命题 1.5.1 知 $\overline{\overline{C}}=\overline{\overline{E}}=c$.

值得注意的是,在长度为 1 的闭区间 $[0,1]$ 中挖去可数个开区间,这些开区间的长度之和为 $3^{-1}+2\cdot3^{-2}+\cdots+2^{n-1}\cdot3^{-n}+\cdots=1$,而剩下来的 Cantor 集 $C$ 可以被看作"长度"为 0,但居然具有连续基数 $c$.

## 2.8 稠密性

**定义 2.8.1** 若 $\overline{E}=\mathbf{R}^n$,称 $E$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的**稠密集**. 若 $(\overline{E})^\circ=\varnothing$,称 $E$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的**稀疏集**.

**引理 2.8.1** $E$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的稠密集 $\Leftrightarrow$ 对任意的非空开集 $G$,有 $G\cap E\neq\varnothing$.

**例 2.8.1** Cantor 集 $C$ 是 $R$ 中的**稀疏集**.

**证** 由命题 2.7.3,知 Cantor 集 $C$ 是一个没有内点的闭集,故 $(\overline{C})^\circ=\mathring{C}=\varnothing$.

**引理 2.8.2** 设 $G$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的稠密开集,则对任意的非空开集 $S$,存在开球 $B$ 使得 $\overline{B}\subset S\cap G$.

**证** 对任意的非空开集 $S$,由引理 2.8.1 知 $S\cap G$ 是非空开集. 取 $y\in S\cap G$,存在 $r>0$ 使 $B(y,r)\subset S\cap G$,令 $B=B\left(y,\frac{r}{2}\right)$,则有 $\overline{B}\subset B(y,r)\subset S\cap G$.

**引理 2.8.3** 在 $\mathbf{R}^n$ 中可数个稠密开集之交也是稠密集.

**证** 设 $\{G_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的稠密开集序列,对任意的非空开集 $S$,则由 $G_1$ 是稠密开

集及引理 2.8.2,存在开球 $B_1$ 使 $\overline{B_1}\subset S\cap G_1$. 再对开球 $B_1$ 及稠密开集 $G_2$ 继续用引理,存在开球 $B_2$ 使 $\overline{B_2}\subset B_1\cap G_2$,继续下去得闭球列:

$$\overline{B_1}\supset\overline{B_2}\supset\overline{B_3}\supset\cdots\supset\overline{B_k}\supset\cdots.$$

由闭集套定理存在 $x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{B_k}\subset S$. 另一方面,对每个 $k$ 有 $x\in\overline{B_k}\subset G_k$,故 $x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k$,所以 $S\cap(\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k)\neq\varnothing$. 于是由引理 2.8.1,知交集 $\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中是稠密集.

**定理 2.8.4(Baire 定理)** $\mathbf{R}^n$ 中可数个无内点的闭集之并也无内点.

**证** 设 $\{F_k\}$ 是无内点的闭集列,对每个 $k$,令 $G_k=F_k^c$,则

$$\overline{G_k}=(F_k^c)^-=(\mathring{F_k})^c=\varnothing^c=\mathbf{R}^n,$$

即每个 $G_k$ 是稠密开集,由命题 2.8.3 知其交集是稠密集,即 $(\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k)^-=\mathbf{R}^n$,从而有 $(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k)^\circ=(\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k)^{c\circ}=(\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k)^{-c}=(\mathbf{R}^n)^c=\varnothing$,所以并集 $\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k$ 无内点.

**例 2.8.2** 有理数集 $\mathbf{Q}$ 不是 $G_\delta$ 集,无理数集 $\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ 不是 $F_\sigma$ 集.

**证** 记有理数集 $\mathbf{Q}=\{r_1,r_2,\cdots,r_k,\cdots\}$,若无理数集 $\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ 是 $F_\sigma$ 集,记 $\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k$,这里每个 $F_k$ 是无内点的闭集,则 $\mathbf{R}=(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{r_k\})\cup(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k)$ 为可数个无内点的闭集之并,由定理 2.8.4 知 $\mathbf{R}$ 无内点,得矛盾. 所以无理数集 $\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$ 不是 $F_\sigma$ 集,从而可得有理数集 $\mathbf{Q}$ 不是 $G_\delta$ 集.

**例 2.8.3** 证明在 $\mathbf{R}^1$ 上不存在如下的函数 $f(x)$:它在有理数上连续,在无理数上不连续.

**证** 由命题 2.5.6 知 $f(x)$ 的连续点集是 $G_\delta$ 集,再由上例知有理数集 $\mathbf{Q}$ 不是 $G_\delta$ 集,所以 $f(x)$ 的连续点集不可能是有理数集 $\mathbf{Q}$.

**定义 2.8.2** 若 $E$ 是 $R^n$ 中可数个稀疏集之并,则称 $E$ 是**第一纲集**. 若 $E$ 不是第一纲集,则称 $E$ 是**第二纲集**.

**定理 2.8.5** $\mathbf{R}^n$ 中每个非空开集是第二纲集.

**证** 若 $\mathbf{R}^n$ 中的非空开集 $G$ 是第一纲集,则有 $G=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$,这里 $\{A_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的稀疏集列,易知 $\{\overline{A_k}\}$ 也是 $\mathbf{R}^n$ 中的稀疏集列. 对每个 $k$,令 $B_k=(\overline{A_k})^c$,则 $\{B_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的稠密开集序列,故其交集 $\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的稠密集,当然有 $G\cap(\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k)\neq\varnothing$. 于是

$$G\cap(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)^c\supset G\cap(\bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{A_k})^c=G\cap(\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k)\neq\varnothing.$$

此即表示$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \neq G$，所以 $G$ 不是第一纲集，故为第二纲集.

## 2.9 例题选讲

**例 2.9.1** 证明下列条件等价：

(1) $x \in \overline{E}$；

(2) 对任意 $\delta > 0$，有 $B(x,\delta) \cap E \neq \varnothing$；

(3) 存在 $E$ 中点列$\{x_k\}$，使$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$.

**证** (1)⇒(2)：设 $x \in \overline{E} = E \cup E'$，对任意 $\delta > 0$，若 $x \in E$，显然有 $B(x,\delta) \cap E \neq \varnothing$. 若 $x \notin E$，则 $x \in E'$，有$(B(x,\delta) \setminus \{x\}) \cap E \neq \varnothing$，从而可得 $B(x,\delta) \cap E \neq \varnothing$.

(2)⇒(3)：对每个 $k$，取 $x_k \in E \cap B\left(x, \dfrac{1}{k}\right)$，得 $E$ 中点列$\{x_k\}$，有$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$.

(3)⇒(1)：若存在 $E$ 中点列$\{x_k\}$，使$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$，因为$\{x_k\}$也是闭集$\overline{E}$中的点列，由定理 2.3.5，知 $x \in \overline{E}$.

**例 2.9.2** 设 $A, B \subset \mathbf{R}^n$. 若 $A \cap B = \varnothing$，证明：$\mathring{A} \cap \overline{B} = \varnothing$.

**证** 因 $A \cap B = \varnothing$，故 $\mathring{A} \cap B = \varnothing$，于是 $B \subset (A^\circ)^c$. 因 $A^\circ$为开集，知$(A^\circ)^c$ 为闭集，从而可得$\overline{B} \subset \overline{(A^\circ)^c} = (A^\circ)^c$，即有 $\mathring{A} \cap \overline{B} = \varnothing$.

**例 2.9.3** 设 $E \subset \mathbf{R}^n$，证明：孤立点集 $E \setminus E'$ 是至多可数集.

**证** 记以有理点为中心，以有理数为半径的球的全体为 $H$，则有$\overline{\overline{H}} = \aleph_0$. 对每个 $x \in E \setminus E'$，存在 $\delta_x > 0$ 使得 $E \cap B(x,\delta_x) = \{x\}$. 取 $H$ 中元 $B_x$，使 $x \in B_x \subset B(x,\delta_x)$，现在令 $f(x) = B_x$，得映射 $f: E \setminus E' \to H$. 若 $x, y \in E \setminus E'$ 且 $x \neq y$，由 $E \cap B_x = \{x\}$及 $E \cap B_y = \{y\}$，知 $B_x \neq B_y$，故 $f: E \setminus E' \to H$ 是单射，所以$\overline{\overline{E \setminus E'}} \leqslant \overline{\overline{H}} = \aleph_0$.

**例 2.9.4** 设 $E \subset \mathbf{R}^n$，若 $E'$ 是至多可数集，证明：$E$ 是至多可数集.

**证** 因 $E \subset (E \setminus E') \cup E'$，由上例知孤立点集 $E \setminus E'$ 是至多可数集，于是$(E \setminus E') \cup E'$是可数集，所以 $E$ 是至多可数集.

**例 2.9.5** 设$\overline{A} = \mathbf{R}^n$，开集 $U \subset \mathbf{R}^n$，则 $U \subset \overline{A \cap U}$.

**证** 设 $x \in U$，对任意 $\delta > 0$，存在 $r > 0$ 使 $B(x,r) \subset U$. 不妨设 $r < \delta$，由$\overline{A} = \mathbf{R}^n$，知 $A \cap B(x,r) \neq \varnothing$，从而有$(A \cap U) \cap B(x,\delta) \supset A \cap \big(U \cap B(x,r)\big) = A \cap B(x,r)$

$\neq\varnothing$. 故有 $x\in\overline{A\cap U}$，所以 $U\subset\overline{A\cap U}$.

**例 2.9.6**　设 $G\subset\mathbf{R}^n$，证明 $G$ 是开集当且仅当：对任意的 $E\subset\mathbf{R}^n$，有 $G\cap\overline{E}\subset\overline{G\cap E}$.

**证**　充分性. 令 $E=G^c$，有 $G\cap\overline{G^c}\subset\overline{G\cap G^c}=\varnothing$，于是 $\overline{G^c}\subset G^c$，所以 $\overline{G^c}=G^c$，故 $G^c$ 是闭集，即 $G$ 是开集.

必要性. 设 $G$ 是开集，对任意的 $E\subset\mathbf{R}^n$，若 $x\in G\cap\overline{E}$，因 $x$ 属于开集 $G$，存在 $r>0$ 使 $B(x,r)\subset G$. 现在对任意 $\delta>0$，令 $\eta=\min\{r,\delta\}$，则由 $x\in\overline{E}$ 知 $B(x,\eta)\cap E\neq\varnothing$. 故有 $B(x,\eta)\cap(G\cap E)\neq\varnothing$，于是 $x\in\overline{G\cap E}$，所以 $G\cap\overline{E}\subset\overline{G\cap E}$.

**例 2.9.7**　证明：$\mathbf{R}^n$ 中开集的全体所成之集具连续基数 $c$.

**证**　记开集族 $\Gamma=\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，令 $H$ 为以有理点为中心，以有理数为半径的开球全体，则 $H$ 为可数集，记 $H=\{B_1,B_2,\cdots,B_k,\cdots\}$. 对每个开集 $G_\lambda\in\Gamma$，存在自然数集 $\mathbf{N}$ 的子集 $S_\lambda$，使 $G_\lambda=\bigcup\{B_k:k\in S_\lambda\}$，得到从 $\Gamma$ 到 $P(N)$ 的一个单射，故 $\overline{\overline{\Gamma}}\leqslant\overline{\overline{P(N)}}=c$.

另一方面，记 $\Gamma_0=\{B(0,r):r\in(0,+\infty)\}$，则 $\overline{\overline{\Gamma}}\geqslant\overline{\overline{\Gamma_0}}=c$. 合之，得 $\overline{\overline{\Gamma}}=c$.

**例 2.9.8**　证明：$\mathbf{R}^n$ 中闭集的全体所成之集具连续基数 $c$.

**证**　由上例推出.

**例 2.9.9**　设 $f$ 为定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的函数，证明下列条件等价：

(1) $f$ 是连续函数；

(2) 对任意的 $A\subset\mathbf{R}^n$，有 $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$；

(3) 对任意的 $B\subset\mathbf{R}^1$，有 $f^{-1}(\overline{B})\supset\overline{f^{-1}(B)}$.

**证**　(1)⇒(2)：设 $A\subset\mathbf{R}^n$，则 $A\subset f^{-1}(f(A))\subset f^{-1}(\overline{f(A)})$. 由 $\overline{f(A)}$ 为闭集及 $f$ 为连续，知 $f^{-1}(\overline{f(A)})$ 是闭集. 从而可得 $\overline{A}\subset\overline{(f^{-1}(\overline{f(A)}))}=f^{-1}(\overline{f(A)})$，故 $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$.

(2)⇒(3)：设 $B\subset\mathbf{R}^1$，则 $f^{-1}(B)\subset\mathbf{R}^n$，故 $f(\overline{f^{-1}(B)})\subset\overline{f(f^{-1}(B))}\subset\overline{B}$，由此得到 $f^{-1}(\overline{B})\supset\overline{f^{-1}(B)}$.

(3)⇒(1)：设任意闭集 $B\subset\mathbf{R}^1$，即 $\overline{B}=B$，于是有 $\overline{f^{-1}(B)}\subset f^{-1}(\overline{B})=f^{-1}(B)$. 另一方面，显然有 $f^{-1}(B)\subset\overline{f^{-1}(B)}$，故 $f^{-1}(B)=\overline{f^{-1}(B)}$，即 $f^{-1}(B)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中闭集，所以 $f$ 为连续函数.

**例 2.9.10**　设 $F\subset\mathbf{R}^n$ 是闭集，证明：存在 $F$ 的至多可数子集 $A$，使得 $\overline{A}=F$.

**证**　不妨设 $F$ 是无限集，记 $\Gamma$ 为以有理点为中心，以有理数为半径的球的全体.

因 $\Gamma$ 为可数集，设 $\Gamma=\{B_1,B_2,\cdots,B_k,\cdots\}$，对每个 $k$，若 $F\cap B_k\neq\varnothing$，则取点 $x_k\in F\cap B_k$，记这些点 $x_k$ 的全体为 $A$，则易知 $A$ 为 $F$ 的至多可数子集. 下证 $F=\overline{A}$.

设 $x\in F$，对任意 $\delta>0$，存在 $B_k\in\Gamma$ 使 $x\in B_k\subset B(x,\delta)$，则 $F\cap B_k\neq\varnothing$，于是有 $x_k\in A\cap B_k$，故 $A\cap B(x,\delta)\neq\varnothing$，即有 $x\in\overline{A}$，从而得 $F\subset\overline{A}$. 另一方面，有 $\overline{A}\subset\overline{F}=F$. 所以 $F=\overline{A}$.

**例 2.9.11** 设 $F_1,F_2$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中两个互不相交的闭集，则存在 $\mathbf{R}^n$ 中的开集 $G_1,G_2$，满足 $G_1\cap G_2=\varnothing$，且 $F_1\subset G_1,F_2\subset G_2$.

**证** 令 $f(x)=d(x,F_1)-d(x,F_2)$，则由定理 2.6.4 知 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数，从而可得 $G_1=f^{-1}((-\infty,0))$ 与 $G_2=f^{-1}((0,+\infty))$ 皆为开集，易知 $G_1\cap G_2=\varnothing$.

而当 $x\in F_1$ 时，$f(x)<0$，得 $x\in G_1$，有 $F_1\subseteq G_1$. 同理有 $F_2\subset G_2$.

**例 2.9.12** 设 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一族有界闭集，若任取其中有限个：$F_{\lambda_1},F_{\lambda_2},\cdots,F_{\lambda_m}$ 都有 $\bigcap\limits_{i=1}^{m}F_{\lambda_i}\neq\varnothing$. 试证明：$\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda\neq\varnothing$.

**证** 若 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda=\varnothing$，则 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda^c=\mathbf{R}^n$. 取定一个指标 $\mu\in\Lambda$，则 $F_\mu\subset\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda^c$. 因 $\{F_\lambda^c\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是有界闭集 $F_\mu$ 的开覆盖，存在有限子覆盖 $\{F_{\lambda_1}^c,F_{\lambda_2}^c,\cdots,F_{\lambda_m}^c\}$，则 $F_\mu\subset\bigcup\limits_{i=1}^{m}F_{\lambda_i}^c=(\bigcap\limits_{i=1}^{m}F_{\lambda_i})^c$，故 $F_\mu\cap(\bigcap\limits_{i=1}^{m}F_{\lambda_i})=\varnothing$，得矛盾，故必有 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda\neq\varnothing$.

**例 2.9.13** 设 $F\subset\mathbf{R}^n$，$f(x)$ 是 $F$ 上的连续函数. 证明：若 $F$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界闭集，则 $f(F)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 中的有界闭集.

**证** 由延拓定理，不妨设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数. 设 $\Gamma=\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $f(F)$ 的开覆盖，则 $\{f^{-1}(G_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是紧集 $F$ 的开覆盖，故存在有限子覆盖，设为

$$\{f^{-1}(G_{\lambda_k}):k=1,2,\cdots,m\}\text{，即 }F\subset\bigcup_{k=1}^{m}f^{-1}(G_{\lambda_k}).$$

则 $f(F)\subset\bigcup\limits_{k=1}^{m}f(f^{-1}(G_{\lambda_k}))\subset\bigcup\limits_{k=1}^{m}G_{\lambda_k}$，即 $\Gamma_0=\{G_{\lambda_k}\mid k=1,2,\cdots,m\}$ 是 $\Gamma$ 的有限子覆盖，所以 $f(F)$ 是 $\mathbf{R}$ 中的紧集，从而可得 $f(F)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 中的有界闭集.

**例 2.9.14** 设 $f(x)$ 是 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的连续函数，若 $E$ 是紧集，则

(1) $f(x)$ 是 $E$ 上的有界函数；

(2) $f(x)$ 在 $E$ 上可以取到最大值与最小值；

(3) $f(x)$ 是 $E$ 上的一致连续函数.

**证** (1) 因 $E$ 是紧集,由例 2.9.13 知 $f(E)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 中的有界闭集,所以 $f(x)$ 是有界函数.

(2) 记 $m=\inf f(E)$,$M=\sup f(E)$. 因为 $f(E)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 中的有界闭集,则 $m\in f(E)$,$M\in f(E)$. 于是存在 $a,b\in E$,使 $f(a)=m$,$f(b)=M$.

(3) 对任意 $\varepsilon>0$,对每个 $x\in E$,存在 $\delta_x>0$,使当 $y\in E\cap B(x,\delta_x)$ 时,有 $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 令 $r_x=\frac{\delta_x}{2}$,则 $\{B(x,r_x):x\in E\}$ 是紧集 $E$ 的开覆盖,因而存在有限子覆盖 $\{B(x_k,r_{x_k}):k=1,2,\cdots,m\}$. 现在令 $r=\min\{r_{x_k}:k=1,2,\cdots,m\}$,则当 $x,y\in E$ 且 $|x-y|<r$ 时,设 $x\in B(x_k,r_{x_k})$,有 $|x_k-y|\leqslant|x_k-x|+|x-y|<\frac{\delta_{x_k}}{2}+\frac{\delta_{x_k}}{2}=\delta_{x_k}$,即 $y\in B(x_k,\delta_{x_k})$,故

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|f(x)-f(x_k)|+|f(x_k)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

所以 $f(x)$ 在 $E$ 上是一致连续的.

**例 2.9.15** 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数,则

(1) $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的有界函数;

(2) $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上可以取到最大值与最小值;

(3) $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一致连续函数.

**证** (1) 因为 $H=\overline{\{x\in E:f(x)\neq0\}}$ 为紧集,知 $f(H)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 中的有界闭集,从而可得 $f(\mathbf{R}^n)=f(H)\cup\{0\}$ 也是 $\mathbf{R}^1$ 中的有界闭集,所以 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的有界函数.

(2) 记 $m=\inf f(\mathbf{R}^n)$,$M=\sup f(\mathbf{R}^n)$,因为 $f(\mathbf{R}^n)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 中的有界闭集,则 $m\in f(\mathbf{R}^n)$,$M\in f(\mathbf{R}^n)$. 于是存在 $a,b\in\mathbf{R}^n$,使 $f(a)=m$,$f(b)=M$.

(3) 设 $H=\overline{\{x\in E:f(x)\neq0\}}\subset B(0,k)$,因为 $f(x)$ 是紧集 $\overline{B(0,k+1)}$ 上的连续函数,故 $f(x)$ 在 $\overline{B(0,k+1)}$ 上为一致连续. 对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使当 $x,y\in\overline{B(0,k+1)}$ 且 $|x-y|<\delta$ 时,有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 于是,当 $x,y\in\mathbf{R}^n$ 且 $|x-y|<\min\{\delta,1\}$ 时,必有 $x,y\in\overline{B(0,k+1)}$ 或 $x,y\in(B(0,k))^c$,所以 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

**例 2.9.16** 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}^1$ 上的可微函数. 若对任意 $t\in\mathbf{R}^1$,点集 $\{x:f'(x)=t\}$ 是闭集,试证明:$f'(x)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上的连续函数.

**证** 对任意 $t\in\mathbf{R}^1$,知 $G=\{x:f'(x)\neq t\}$ 是开集,故 $G$ 可表达为可数个互不相交的构成区间之并,设 $G=\bigcup_k(a_k,b_k)$. 可以证明在每个区间 $(a_k,b_k)$ 上,函数 $f'(x)$

$-t$ 不改变符号.

事实上,若存在 $p,q\in(a_k,b_k)$,使函数 $f'(x)-t$ 在点 $p,q$ 处符号相反,这里则由数学分析中的达布定理,知存在 $s\in(a_k,b_k)$使 $f'(s)-t=0$,与 $G$ 的定义矛盾.

所以$\{x:f'(x)>t\}$为开集 $G$ 的某些构成区间之并,故为开集.同理$\{x:f'(x)<t\}$也为开集.由 $t$ 的任意性,知任一开区间的原象为开集,从而任一开集的原象为开集,所以 $f'(x)$是 $\mathbf{R}^1$ 上的连续函数.

**例 2.9.17** 设 $A,B\subset\mathbf{R}^n$,且 $A\cap\overline{B}=\overline{A}\cap B=\varnothing$,则存在开集 $U,V$ 满足 $U\cap V=\varnothing$,且 $A\subset U,B\subset V$.

**证** 令 $S=(\overline{A}\cap\overline{B})^c$,则$(S\cap\overline{A})\cap(S\cap\overline{B})=S\cap(\overline{A}\cap\overline{B})=\varnothing$.令

$$f(x)=d(x,S\cap\overline{A})-d(x,S\cap\overline{B}).$$

则 $f(x)$为 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数,从而可得$U=\{x:f(x)<0\}$与$V=\{x:f(x)>0\}$为互不相交的开集.

设 $x\in A$,由 $A\cap S^c\subset A\cap\overline{B}=\varnothing$,知 $x\in S$ 及 $x\notin\overline{B}$,故有 $x\in S\cap\overline{A}$及 $x\notin S\cap\overline{B}$.于是 $f(x)=d(x,S\cap\overline{A})-d(x,S\cap\overline{B})<0$,即 $x\in U$,得到 $A\subset U$,同理可得 $B\subset V$.

**例 2.9.18** 设 $F$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界闭集,$G$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集且 $F\subset G$,则存在 $\delta>0$,使得当$|x|<\delta$时,有 $F+\{x\}=\{y+x:y\in F\}\subset G$.

**证** 不妨设 $G\neq\mathbf{R}^n$,因 $F,G^c$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的非空闭集,有 $F\cap G^c=\varnothing$及 $F$ 是有界集,由推论 2.6.3,知 $d(F,G^c)=\delta>0$.于是当$|x|<\delta$时,有 $F+\{x\}\subset G$.

事实上,设 $s\in F+\{x\}$,则存在 $y\in F$ 使 $s=y+x$,故$|s-y|=|x|<\delta$,必有 $s\notin G^c$,即 $s\in G$,所以 $F+\{x\}\subset G$.

**例 2.9.19** 设 $C$ 为$[0,1]$中的 Cantor 集,证明:$C+C=\{x+y:x\in C,y\in C\}=[0,2]$.

**证** 首先,$C+C\subset[0,2]$是显然的.下设 $t\in[0,2]$.对每个 $n$,记号 $F_n$ 如构造 Cantor 集时所述,现在令平面上的点集 $D_n=(F_n\times F_n)\cap\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:x+y=t\}$,则$\{D_n\}$为非空有界递减闭集列,故存在$(x,y)\in\bigcap_{n=1}^{\infty}D_n\subset C\times C$,于是 $t=x+y\in C+C$,所以有 $C+C\supset[0,2]$.合之,有 $C+C=[0,2]$.

**例 2.9.20** 证明:$A$ 是稀疏集$\Leftrightarrow\overline{A}$的余集是稠密集.

**证** 由定义及命题 2.3.11,有 $A^{-o}=\varnothing\Leftrightarrow A^{-oc}=\mathbf{R}^n\Leftrightarrow A^{-c-}=\mathbf{R}^n$,即可证明.

# 习题二

1. 设 $G_1,G_2$ 是 $\mathbf{R}^1$ 中的开集，且 $G_1\subset G_2$，则 $G_1$ 的每个构成区间必含在 $G_2$ 的某个构成区间之中.

2. 设 $E\subset\mathbf{R}^n$. 证明：$\mathring{E}=\bigcup\{G:G\subset E$ 且 $G$ 为开集$\}$.

3. 设 $A,B\subset\mathbf{R}^1$. 证明：$(A\times B)^\circ=\mathring{A}\times\mathring{B}$.

4. 设 $A,B\subset\mathbf{R}^n$. 证明：若 $B$ 为有限集，则 $A'=(A\backslash B)'$.

5. 设 $E\subset\mathbf{R}^n$. 证明 $x\in E'$ 当且仅当：存在 $E\backslash\{x\}$ 中的点列 $\{x_k\}$ 收敛于 $x$.

6. 设 $E\subset\mathbf{R}^n$. 证明：$\overline{E}=\bigcap\{F:E\subset F$ 且 $F$ 为闭集$\}$.

7. 设 $G$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集，$\mathbf{Q}^n$ 是有理点集，则 $\overline{G}=\overline{G\backslash\mathbf{Q}^n}$.

8. 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单增函数，$E=\{x:\forall\varepsilon>0,f(x+\varepsilon)-f(x-\varepsilon)>0\}$，则 $E$ 为闭集.

9. 设 $E\subset\mathbf{R}^2$ 是不可数集，则 $E'\neq\varnothing$.

10. 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，若对任意的 $x\in E$，存在 $\delta>0$，使 $B(x,\delta)\cap E$ 为至多可数集，证明：$E$ 为至多可数集.

11. 设 $E\subset\mathbf{R}^n$ 是有界闭集，若对任意的 $x\in E$，存在 $\delta>0$，使 $B(x,\delta)\cap E$ 为有限集，证明：$E$ 为有限集.

12. 证明：$\mathbf{R}^n$ 中每个非空开集可表示为至多可数个中心为有理点、半径为有理数的开球之并.

13. 证明：$\mathbf{R}^n$ 中每个非空开集可表示为至多可数个开矩体之并.

14. 设 $f(x)$ 为定义在$[a,b]$上的连续函数，则$\{x\in[a,b]:f(x)=0\}$是闭集.

15. 设 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的函数，若对任意的 $t\in\mathbf{R}^1$，$\{x:f(x)\geqslant t\}$ 与 $\{x:f(x)\leqslant t\}$ 都是闭集，证明：$f(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数.

16. 若 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为连续函数，则复合函数 $g\circ f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为连续函数.

17. 对 $(x,y)\in\mathbf{R}^2$，令 $p_x(x,y)=x$，证明：$p_x:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^1$ 为连续函数.

18. 设 $f$ 为定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的函数，$\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是开集族，$E=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda$. 若对每个 $\lambda\in\Lambda$

有 $f\in C(E_\lambda)$，则 $f\in C(E)$.

19. 设 $f$ 为定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的函数，$E_1,E_2$ 是闭集，$E=E_1\cup E_2$. 若 $f\in C(E_1)$，$f\in C(E_2)$，则 $f\in C(E)$.

20. 证明：$x\in E'\Leftrightarrow d(x,E\setminus\{x\})=0$.

21. 证明：$x\in \overline{E}\Leftrightarrow d(x,E)=0$.

22. 证明：$x\in \mathring{E}\Leftrightarrow d(x,E^c)>0$.

23. 证明：$\mathbf{R}^n$ 中每个闭集是 $G_\delta$ 集，每个开集是 $F_\sigma$ 集.

24. 证明：Cantor 集 $C$ 是无处稠密集.

25. 证明：$\mathbf{R}^1$ 中的可数稠密集不是 $G_\delta$ 集.

26. 证明：在$[0,1]$上不存在如下函数 $f(x)$：它在有理数上连续，在无理数上不连续.

27. 设 $A,B\subset\mathbf{R}^n$，且 $A\cap\overline{B}=\overline{A}\cap B=\varnothing$. 若 $A\cup B$ 为闭集，则 $A,B$ 皆为闭集.

28. 设 $A,B\subset\mathbf{R}^n$，且 $A\cap\overline{B}=\overline{A}\cap B=\varnothing$. 若 $A\cup B$ 为开集，则 $A,B$ 皆为开集.

29. 设$\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$是 $\mathbf{R}^1$ 中的一族开区间，若 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\neq\varnothing$，则并集 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ 是一个开区间.

30. 设 $E\subset\mathbf{R}^n$ 中的每个点都是 $E$ 的孤立点，证明：$E$ 可以表示为开集与闭集的交集.

31. 设 $A,B\subset\mathbf{R}^1$，证明：$\overline{A\times B}=\overline{A}\times\overline{B}$.

32. 设 $A,B$ 是 $\mathbf{R}^1$ 中的 $F_\sigma$ 集，证明：$A\times B$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的 $F_\sigma$ 集.

33. 设 $f\in C(\mathbf{R}^1)$，则 $F=\{(x,y):f(x)\geqslant y\}$是 $\mathbf{R}^2$ 中的闭集.

34. 设 $f$ 为定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数，$A$ 是有界集，则$\overline{f(A)}=f(\overline{A})$.

35. 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，点 $x_0\in\mathbf{R}^n$，函数 $f:E\to\mathbf{R}$. 证明 $f$ 在点 $x_0$ 处连续当且仅当：对 $E$ 中收敛于 $x_0$ 的任一点列$\{x_k\}$，有$\lim\limits_{k\to\infty}f(x_k)=f(x_0)$.

36. 设 $f$ 为定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的函数. 证明 $f$ 是连续函数当且仅当：对任意子集 $B\subset\mathbf{R}^1$，有 $f^{-1}(B^\circ)\subset(f^{-1}(B))^\circ$.

37. 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，$f(x)$是 $E$ 上的连续函数. 证明：若 $E$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 $F_\sigma$ 集，则 $f(E)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 中的 $F_\sigma$ 集.

38. 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，$f(x)$是 $E$ 上的连续函数. 举例证明：闭集的象集不一定是闭集，开集的象集不一定是开集.

39. 设 $F$ 是 $\mathbf{R}^1$ 中闭集，记 $E$ 为 $F^c$ 的构成区间中心点的全体. 试证明：$E'\subset F'$.

40. 作一可数集 $A$，使集 $A'$ 具连续基数，且 $A\cap A'=\varnothing$.

41. 设 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一族闭集，若对任意的可数子集 $S\subset\Lambda$，有 $\bigcap\limits_{\lambda\in S}F_\lambda\neq\varnothing$. 试证明：$\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda\neq\varnothing$.

42. 设 $\{F_\alpha\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一族有界闭集，$G$ 是开集且有 $\bigcap\limits_{\alpha}F_\alpha\subset G$，试证明：$\{F_\alpha\}$ 中存在 $F_{\alpha_1},F_{\alpha_2},\cdots,F_{\alpha_m}$，使得 $\bigcap\limits_{i=1}^{m}F_{\alpha_i}\subset G$.

43. 设 $A,B\subset\mathbf{R}^n$，证明：$d(A,B)=d(\overline{A},\overline{B})$.

44. 设 $F\subset G\subset\mathbf{R}^n$，且 $F$ 为闭集，而 $G$ 为开集. 证明：存在开集 $U$，使得 $F\subset U\subset\overline{U}\subset G$.

45. 设 $F_1,F_2$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中两个互不相交的非空闭集，则存在开集 $G_1,G_2$，满足：$F_1\subset G_1,F_2\subset G_2$，且 $\overline{G_1}\cap\overline{G_2}=\varnothing$.

46. 证明：可数个 $G_\delta$ 集的交集是 $G_\delta$ 集. 试问：可数个 $G_\delta$ 集的并集是 $G_\delta$ 集吗？

47. 设 $C$ 为 $[0,1]$ 中的 Cantor 集，证明：$C-C=\{x-y:x\in C,y\in C\}=[-1,1]$.

# 3 Lebesgue 测度

为了建立积分理论,我们希望对 $\mathbf{R}^n$ 中的点集 $E$ 给予一个度量 $m(E)$,它是长度、面积以及体积概念的推广,这就是 Lebesgue 测度的理论.

## 3.1 广义实数集

先引进广义实数集. 在实数集 $\mathbf{R}$ 中再加入两个元 $+\infty$ 与 $-\infty$(有时把 $+\infty$ 简记为 $\infty$),称 $\overline{\mathbf{R}}=\mathbf{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$ 为**广义实数集**,通常记为 $\overline{\mathbf{R}}=[-\infty,+\infty]$.

在广义实数集中的运算法则规定如下:

(1) 对任意的实数 $x\in\mathbf{R}$,规定 $-\infty<x<+\infty$.

(2) 对任意的实数 $x\in\mathbf{R}$,规定

$x+(\pm\infty)=(\pm\infty)+x=(\pm\infty)+(\pm\infty)=\pm\infty$;

$x-(\mp\infty)=(\pm\infty)-(\mp\infty)=\pm\infty$;

$\pm(\pm\infty)=+\infty$;$\pm(\mp\infty)=-\infty$;$|\pm\infty|=+\infty$.

(3) 对任意的实数 $x\in\mathbf{R}$,规定

$x(\pm\infty)=(\operatorname{sgn}x)(\pm\infty)$. 这里 $\operatorname{sgn}x$ 表示 $x$ 的符号函数. 即,当 $x>0$ 时,$\operatorname{sgn}x=1$;当 $x<0$ 时,$\operatorname{sgn}x=-1$;当 $x=0$ 时,$\operatorname{sgn}x=0$.

$(\pm\infty)(\pm\infty)=+\infty$;$(\pm\infty)(\mp\infty)=-\infty$.

(4) 规定 $0\cdot(\pm\infty)=0$.

**注意** $(\pm\infty)-(\pm\infty)$,$(\pm\infty)+(\mp\infty)$ 等是无意义的.

## 3.2 外 测 度

**定义 3.2.1** 设 $E\subset\mathbf{R}^n$,若 $\{I_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的可数个开矩体且覆盖 $E$,则称 $\{I_k\}$ 为 $E$ 的一个 **$L$-覆盖**. 记

$$m^*(E)=\inf\{\sum_k|I_k|:\{I_k\}\text{为 }E\text{ 的 }L\text{-覆盖}\} \tag{3.1}$$

这里 $|I_k|$ 为 $I_k$ 的体积,并称 $m^*(E)$ 为集 $E$ 的 **Lebesgue 外测度**.

**定理 3.2.1**(外测度的性质)

(1) 非负性:$m^*(E)\geqslant 0, m^*(\varnothing)=0$;

(2) 单调性:若 $E_1\subset E_2$,则 $m^*(E_1)\leqslant m^*(E_2)$;

(3) 次可加性:$m^*(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k)\leqslant\sum\limits_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)$.

**证** (1) 显然.

(2) 记 $H_1=\{\sum\limits_k|I_k|:\{I_k\}$是 $E_1$ 的 $L$-覆盖$\}$,$H_2=\{\sum\limits_k|I_k|:\{I_k\}$是 $E_2$ 的 $L$-覆盖$\}$. 因为 $E_1\subset E_2$,故有 $H_1\supset H_2$,所以 $m^*(E_1)=\inf H_1\leqslant\inf H_2=m^*(E_2)$.

(3) 不妨设任意 $k\in\mathbf{N}$,$m^*(E_k)<\infty$. 任意 $\varepsilon>0$,对每个 $k$,取 $E_k$ 的 $L$-覆盖 $\{I_{k,l}\}_{l=1}^{\infty}$,使 $E_k\subset\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}I_{k,l}$,$\sum\limits_{l=1}^{\infty}|I_{k,l}|<m^*(E_k)+\frac{\varepsilon}{2^k}$. 则由 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k\subset\bigcup\limits_{k,l}I_{k,l}$,可知$\{I_{k,l}\}_{k,l}$是 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$的一个 $L$-覆盖,故

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)\leqslant\sum_{k,l}|I_{k,l}|=\sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{l=1}^{\infty}|I_{k,l}|)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)+\varepsilon. \tag{3.2}$$

由 $\varepsilon$ 的任意性,知 $m^*(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k)\leqslant\sum\limits_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)$.

**例 3.2.1** 单点集的外测度为零.

**证** 设单点集$\{a\}\subset\mathbf{R}^n$,任意 $\varepsilon>0$,取开矩体 $I$,使 $a\in I$,$|I|<\varepsilon$. 因为$\{I\}$即为单点集$\{a\}$的一个 $L$-覆盖,故 $m^*(\{a\})\leqslant|I|<\varepsilon$. 再由 $\varepsilon$ 的任意性,知 $m^*(\{a\})=0$.

**例 3.2.2** 可数集的外测度为零.

**证** 设可数集 $E\subset\mathbf{R}^n$,记$\{x_k:k=1,2,3,\cdots\}$,则

$$m^*(E)=m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x_k\})\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m^*(\{x_k\})=0.$$

所以 $m^*(E)=0$.

**定理 3.2.2** 设 $I$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中任一矩体,则 $m^*(I)=|I|$.

**证** (1) 对任意 $\varepsilon>0$,作开矩体 $S\subset\mathbf{R}^n$,使 $S\supset I$,$|S|<|I|+\varepsilon$,则

$$m^*(I)\leqslant|S|<|I|+\varepsilon.$$

由 $\varepsilon$ 的任意性,知 $m^*(I)\leqslant|I|$.

(2) 对任意 $\varepsilon>0$,作闭矩体 $T\subset\mathbf{R}^n$,使 $T\subset I$,$|T|>|I|-\varepsilon$. 对有界闭集 $T$ 的任一 $L$-覆盖$\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$,存在有限子覆盖,不妨设 $T\subset\bigcup\limits_{k=1}^{l}I_k$,则$|T|\leqslant\sum\limits_{k=1}^{l}|I_k|\leqslant\sum\limits_{k=1}^{\infty}|I_k|$,故

$$|I|-\varepsilon<|T|\leqslant\inf\{\sum_k|I_k|:\{I_k\}\text{为 }T\text{ 的 }L\text{-覆盖}\}=m^*(T)\leqslant m^*(I).$$

由 $\varepsilon$ 的任意性,知 $m^*(I)\geqslant|I|$.

故 $m^*(I)=|I|$

**例 3.2.3** 设 $C$ 是[0,1]中的 Cantor 集,则 $m^*(C)=0$.

**证** 由 Cantor 集的构造,知 $C=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$,这里 $F_n$ 是 $2^n$ 个互不相交的长度为$\frac{1}{3^n}$的闭区间之并. 对任意的 $n$,有 $C\subset F_n$,故 $m^*(C)\leqslant m^*(F_n)\leqslant 2^n\frac{1}{3^n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n$. 再由 $n$ 的任意性,知 $m^*(C)=0$.

**定理 3.2.3(平移不变性)** 设 $E\subset\mathbf{R}^n$,$a\in\mathbf{R}^n$,记 $E+\{a\}=\{x+a:x\in E\}$,则

$$m^*(E+\{a\})=m^*(E). \tag{3.3}$$

**证** 因开矩体平移后仍为开矩体,若$\{I_k\}$是 $E$ 的任意一个 $L$-覆盖,则$\{I_k+\{a\}\}$是 $E+\{a\}$的一个 $L$-覆盖,故 $m^*(E+\{a\})\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|I_k+\{a\}|=\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|$. 于是有

$$m^*(E+\{a\})\leqslant\inf\{\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|:\{I_k\}\text{是 }E\text{ 的 }L\text{-覆盖}\}=m^*(E).$$

反之,因为集 $E$ 可以看作由集 $E+\{a\}$作$-a$ 的平移. 于是有

$$m^*(E)=m^*((E+\{a\})+\{-a\})\leqslant m^*(E+\{a\}).$$

所以:$m^*(E+\{a\})=m^*(E)$.

**例 3.2.4** 在 $\mathbf{R}^1$ 中,$m^*(\mathbf{R}^1)=\infty$.

**证** 对任意 $k$,有 $m^*(\mathbf{R}^1)\geqslant m^*([0,k])=k$,所以 $m^*(\mathbf{R}^1)=\infty$.

**例 3.2.5** 在 $\mathbf{R}^2$ 中,直线 $E=\mathbf{R}^1\times\{0\}$,则 $m^*(E)=0$.

**证** 对每个 $k$,令 $E_k=(-k,k)\times\{0\}$. 对任意的 $\varepsilon>0$,作包含 $E_k$ 的开矩体 $I=(-k,k)\times\left(-\frac{\varepsilon}{4k},\frac{\varepsilon}{4k}\right)$,则 $m^*(E_k)\leqslant|I|=\varepsilon$. 由 $\varepsilon$ 的任意性,知 $m^*(E_k)=0$,故 $m^*(E)=m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)=0$,即得 $m^*(E)=0$.

## 3.3 可 测 集

在定理 3.2.1 中我们看到外测度具有次可加性. 由定理 3.2.2 我们看到外测度可望是矩体体积概念在任意集合上的推广. 很自然地,我们希望外测度进一步应该有可数可加性,即当集列$\{E_k\}$互不相交时,应该有$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}m^*(E_k)$. 可

惜对于 $\mathbf{R}^n$ 中任意的互不相交的子集列 $\{E_k\}$，上述可加性的等式不成立. 事实上，当承认选择公理时，即使在 $\mathbf{R}^1$ 中，我们也能造出两个不相交的点集，它们的并的外测度严格小于各自的外测度的和. 于是，我们只好考虑由 $\mathbf{R}^n$ 的部分子集而成的子集族(当然它们包含了所有的矩体)，使得对于它们来说，可数可加性成立. 这种集合就是我们这一节要讨论的可测集.

**定义 3.3.1**　设 $E\subset\mathbf{R}^n$，若对任意的点集 $T\subset\mathbf{R}^n$，有

$$m^*(T)=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c). \tag{3.4}$$

则称 $E$ 为 **Lebesgue 可测集**，简称为可测集.

可测集的全体记为 $M$. 对于可测集 $E$，称其外测度为**测度**，记为 $m(E)$. 称测度为零的可测集为**零测集**.

通常称定义中的条件为**卡氏条件**，称其中的集 $T$ 为**试验集**. 由外测度的次可加性，显然有 $m^*(T)\leqslant m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)$，故定义 3.3.1 中的(3.4)式可以改为不等式：

$$m^*(T)\geqslant m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c). \tag{3.5}$$

**例 3.3.1**　若 $m^*(E)=0$，则 $E$ 为零测集.

**证**　对任意 $T\subset\mathbf{R}^n$，有 $m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)\leqslant m^*(E)+m^*(T)=m^*(T)$，所以 $E$ 为可测集，且 $m(E)=0$.

由此可知：空集、有限集、可数集皆为零测集. 由定义 3.3.1 可立得下述结论.

**定理 3.3.1**　若 $E$ 为可测集，则 $E^c$ 是可测集.

**定理 3.3.2**　若 $A,B$ 为可测集，则 $A\cup B, A\cap B, A\setminus B$ 皆为可测集.

**证**　对任意 $T\subset\mathbf{R}^n$，易知

$$T\cap(A\cup B)=T\cap\big(A\cup(A^c\cap B)\big)=(T\cap A)\cup(T\cap A^c\cap B). \tag{3.6}$$

我们依次利用外测度的次可加性、$B$ 的可测性(取 $T\cap A^c$ 为试验集)以及 $A$ 的可测性(取 $T$ 为试验集)，有

$$\begin{aligned}
&m^*(T\cap(A\cup B))+m^*(T\cap(A\cup B)^c)\\
&\leqslant m^*(T\cap A)+m^*(T\cap A^c\cap B)+m^*(T\cap A^c\cap B^c)\\
&=m^*(T\cap A)+m^*(T\cap A^c)\\
&=m^*(T).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

所以可知 $A\cup B$ 是可测集，从而 $A\cap B=(A^c\cup B^c)^c$ 是可测集，$A\setminus B=A\cap B^c$ 也是

可测集.

**引理 3.3.3** 若$\{E_k\}$是互不相交的可测集列,则对任意 $T\subset\mathbf{R}^n$,有

$$m^*(T)\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}m^*(T\cap E_k)+m^*\left(T\cap(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)^c\right).\tag{3.8}$$

**证** 对任意 $T\subset\mathbf{R}^n$,对可测集 $E_1$ 用卡氏条件,取试验集 $T\cap(E_1\cup E_2)$,有

$$m^*\left(T\cap(E_1\cup E_2)\right)=m^*\left(T\cap(E_1\cup E_2)\cap E_1\right)+m^*\left(T\cap(E_1\cup E_2)\cap E_1^c\right),$$

$$\text{即},m^*\left(T\cap(E_1\cup E_2)\right)=m^*(T\cap E_1)+m^*(T\cap E_2).$$

再用归纳法,对每个 $l$,有 $m^*\left(T\cap(\bigcup_{k=1}^{l}E_k)\right)=\sum_{k=1}^{l}m^*(T\cap E_k)$.

于是对每个 $l$,由$\bigcup_{k=1}^{l}E_k$ 的可测性,可知$\sum_{k=1}^{l}m^*(T\cap E_k)+m^*(T\cap(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)^c)$

$\leqslant m^*(T\cap(\bigcup_{k=1}^{l}E_k))+m^*(T\cap(\bigcup_{k=1}^{l}E_k)^c)=m^*(T)$.

再由 $l$ 的任意性,知 $m^*(T)\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}m^*(T\cap E_k)+m^*(T\cap(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)^c)$.

**定理 3.3.4(可数可加性)** 若$\{E_k\}$是互不相交的可测集列,则并集$\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ 为可测集,且

$$m(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)=\sum_{k=1}^{\infty}m(E_k).\tag{3.9}$$

**证** 对任意 $T\subset\mathbf{R}^n$,由外测度的次可加性以及引理 3.3.3,有

$$\begin{aligned}&m^*(T\cap(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k))+m^*(T\cap(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)^c)\\&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m^*(T\cap E_k)+m^*(T\cap(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)^c)\\&\leqslant m^*(T).\end{aligned}$$

所以$\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ 是可测集,再在引理 3.3.3 中令 $T=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$,有 $m(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)=\sum_{k=1}^{\infty}m(E_k)$.

**推论 3.3.5** 若$\{E_k\}$是可测集列,则并集$\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ 是可测集,且 $m(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m(E_k)$.

**证** 令 $H_1=E_1,H_k=E_k\setminus(\bigcup_{i=1}^{k-1}E_i),k\geqslant 2$. 则$\{H_k\}$是互不相交的可测集列. 显然,$\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}H_k$. 由定理 3.3.4 知 $\bigcup_{k=1}^{\infty}H_k$ 为可测,且 $m(\bigcup_{k=1}^{\infty}H_k)=\sum_{k=1}^{\infty}m(H_k)$.

由此易知,$\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$为可测,且 $m(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)=\sum_{k=1}^{\infty}m(H_k)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m(E_k)$.

由推论 3.3.5 结合定理 3.3.1 易得下述推论.

**推论 3.3.6** 若$\{E_k\}$是可测集列，则交集$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_k$ 是可测集.

**例 3.3.2** 设 $A,B$ 是可测集，若 $B\subset A$ 且 $m(B)<\infty$，则

$$m(A\backslash B)=m(A)-m(B).$$

**定理 3.3.7** 若有递增可测集列 $E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_k\subset\cdots$，则

$$m(\lim_{k\to\infty}E_k)=\lim_{k\to\infty}m(E_k). \tag{3.10}$$

这里，$\lim\limits_{k\to\infty}E_k=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$(见第一章定义 1.1.5).

**证** 不妨设 $m(E_k)<\infty(k=1,2,3,\cdots)$. 令 $E_0=\varnothing,H_k=E_k\backslash E_{k-1}(k=1,2,3,\cdots)$，则$\{H_k\}$为互不相交的可测集列，且$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}H_k$，故

$$\begin{aligned}m(\lim_{k\to\infty}E_k)&=m(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)=m(\bigcup_{k=1}^{\infty}H_k)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}m(H_k)=\sum_{k=1}^{\infty}(m(E_k)-m(E_{k-1}))\\&=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}(m(E_i)-m(E_{i-1}))=\lim_{k\to\infty}m(E_k).\end{aligned}$$

**定理 3.3.8** 若有递减可测集列 $E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_k\supset\cdots$，且 $m(E_1)<\infty$，则

$$m(\lim_{k\to\infty}E_k)=\lim_{k\to\infty}m(E_k). \tag{3.11}$$

这里，$\lim\limits_{k\to\infty}E_k=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_k$(见第一章定义 1.1.5).

**证** 令 $H_k=E_1\backslash E_k(k=1,2,3,\cdots)$，则$\{H_k\}$为递增可测集列，由定理 3.3.7，有

$$m(E_1\backslash(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k))=m(\bigcup_{k=1}^{\infty}H_k)=\lim_{k\to\infty}m(H_k).$$

因为 $m(E_1)<\infty$，有 $m(E_1)-m(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_k)=\lim\limits_{k\to\infty}(m(E_1)-m(E_k))$，即

$$m(\lim_{k\to\infty}E_k)=\lim_{k\to\infty}m(E_k).$$

注意，若缺少定理 3.3.8 中的条件“$m(E_1)<\infty$”，则结论一般不再成立.

**例 3.3.3** 在 $\mathbf{R}^1$ 中，令 $E_k=(k,+\infty)(k=1,2,3,\cdots)$，则$\{E_k\}$为递减可测集列，因而有

$$0=m(\varnothing)=m(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k)\neq\lim_{k\to\infty}m(E_k)=+\infty.$$

## 3.4 可测集类

可测集定义(即定义 3.3.1)指出,要证明一个集合为可测集,应将任意点集 $T$ 作为试验集来验证卡氏条件. 下面的引理告诉我们,只要对于试验集为矩体的情况验证卡氏条件即可. 这当然会为以后的研究带来方便.

**引理 3.4.1** 设 $E\subset\mathbf{R}^n$,则 $E$ 为可测集的充分必要条件是:对任意矩体 $I\subset\mathbf{R}^n$,有

$$m^*(I)=m^*(I\cap E)+m^*(I\cap E^c). \tag{3.12}$$

**证** 必要性显然,下证充分性. 对任意 $T\subset\mathbf{R}^n$,任意 $\varepsilon>0$,取 $T$ 的 $L$-覆盖 $\{I_k\}$,使 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|I_k|\leqslant m^*(T)+\varepsilon$,则

$$\begin{aligned}
&m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)\\
&\leqslant m^*\Big(\big(\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k\big)\cap E\Big)+m^*\Big(\big(\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k\big)\cap E^c\Big)\\
&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m^*(I_k\cap E)+\sum_{k=1}^{\infty}m^*(I_k\cap E^c)\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}[m^*(I_k\cap E)+m^*(I_k\cap E^c)]\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}m^*(I_k)=\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|\leqslant m^*(T)+\varepsilon
\end{aligned}$$

由 $\varepsilon$ 的任意性,有 $m^*(T)\geqslant m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)$,所以 $E$ 是可测集.

**定理 3.4.2** $\mathbf{R}^n$ 中的矩体是可测集.

**证** 设矩体 $S\subset\mathbf{R}^n$,对任意矩体 $I\subset\mathbf{R}^n$,不妨设 $I\cap S\neq\varnothing$,$I\cap S^c\neq\varnothing$. 记矩体 $I_0=I\cap S$,把 $I\cap S^c$ 分割成有限个互不相交的矩体之并:$I\cap S^c=\bigcup\limits_{k=1}^{l}I_k$,则有 $I=\bigcup\limits_{k=0}^{l}I_k$,从而得

$$m^*(I\cap S)+m^*(I\cap S^c)\leqslant\sum_{k=0}^{l}m^*(I_k)=\sum_{k=0}^{l}|I_k|=|I|=m^*(I).$$

由定理 3.4.1,知矩体 $S$ 为可测集.

由 $\mathbf{R}^n$ 中开集的构造(见定理 2.2.8)可知:每个开集可写成可列个互不相交的半开半闭的矩体之并. 这样应用定理 3.4.2 及定理 3.3.4 可知:开集必为可测的. 由此容易得到下述推论.

**推论 3.4.3** 开集、闭集、$F_\sigma$ 集、$G_\delta$ 集、Borel 集皆是可测集.

**定理 3.4.4(可测集的等价刻画)** 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，则下列条件等价：

(1) $E$ 是可测集；

(2) 对任意 $\varepsilon>0$，存在开集 $G\supset E$，使 $m^*(G\setminus E)<\varepsilon$；

(3) 对任意 $\varepsilon>0$，存在闭集 $F\subset E$，使 $m^*(E\setminus F)<\varepsilon$；

(4) 存在 $G_\delta$ 集 $H\supset E$，使 $m(H\setminus E)=0$；

(5) 存在 $F_\sigma$ 集 $K\subset E$，使 $m(E\setminus K)=0$.

**证** (1)⇒(2)：① 若 $m(E)<\infty$. 对任意 $\varepsilon>0$，取 $E$ 的 $L$-覆盖 $\{I_k\}$，使 $\sum\limits_k|I_k|<m(E)+\varepsilon$. 令 $G=\bigcup\limits_k I_k$，则开集 $G\supset E$，且

$$m(G\setminus E)=m(G)-m(E)\leqslant\sum_k|I_k|-m(E)<\varepsilon.$$

② 若 $m(E)=\infty$. 令 $E_k=E\cap B(0,k)(k=1,2,3,\cdots)$，则 $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$. 对任意 $\varepsilon>0$，对每个 $k$，存在开集 $G_k\supset E_k$，使 $m^*(G_k\setminus E_k)<\frac{\varepsilon}{2^k}$. 令 $G=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}G_k$，则开集 $G\supset E$，且

$$m^*(G\setminus E)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m(G_k\setminus E_k)<\varepsilon.$$

(2)⇒(4)：由(2)知对每个自然数 $k$，存在开集 $G_k\supset E$，使 $m^*(G_k\setminus E)<\frac{1}{k}$. 令 $H=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}G_k$，则有 $G_\delta$ 集 $H\supset E$，且对任意 $k$，有

$$m(H\setminus E)\leqslant m^*(G_k\setminus E)<\frac{1}{k}.$$

由 $k$ 的任意性，必有 $m(H\setminus E)=0$.

(4)⇒(1)：由(4)知存在 $G_\delta$ 集 $H\supset E$，使 $m(H\setminus E)=0$，则

$$E=H\setminus(H\setminus E).$$

因为 $G_\delta$ 集 $H$ 与零测集 $H\setminus E$ 皆为可测集，所以 $E$ 为可测集.

(1)⇒(3)：$E$ 为可测集，从而得 $E^c$ 为可测集，由(1)知(2)成立，对任意 $\varepsilon>0$，存在开集 $G\supset E^c$，使 $m^*(G\setminus E^c)<\varepsilon$. 令 $F=G^c$，则闭集 $F\subset E$，且

$$m(E\setminus F)=m(E\setminus G^c)=m(G\setminus E^c)<\varepsilon.$$

(3)⇒(5)：由(3)知对每个自然数 $k$，存在闭集 $F_k\subset E$，使 $m^*(E\setminus F_k)<\frac{1}{k}$. 令 $K=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k$，则有 $F_\sigma$ 集 $K\subset E$，且对任意 $k$，有

$$m(E\setminus K)\leqslant m^*(E\setminus F_k)<\frac{1}{k}.$$

由 $k$ 的任意性，必有 $m(E\setminus K)=0$.

(5)⇒(1)：由(5)知，存在 $F_\sigma$ 集 $K\subset E$，使 $m(E\setminus K)=0$，则

$$E=K\cup(E\setminus K).$$

因为 $F_\sigma$ 集 $K$ 与零测集 $E\setminus K$ 皆为可测集，所以 $E$ 为可测集.

**定理 3.4.5** 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，则存在 $G_\delta$ 集 $H$，使 $H\supset E$ 且 $m(H)=m^*(E)$(通常称 $H$ 为 $E$ 的**等测包**).

**证** 对每个自然数 $k$，存在开集 $G_k\supset E$，使 $m(G_k)\leqslant m^*(E)+\frac{1}{k}$. 令 $H=\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k$，则有 $G_\delta$ 集 $H\supset E$，且对任意 $k$，有

$$m^*(E)\leqslant m(H)\leqslant m(G_k)\leqslant m^*(E)+\frac{1}{k}.$$

由 $k$ 的任意性，必有 $m(H)=m^*(E)$.

**命题 3.4.6** 设 $T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是一个双射，且保持点集的外测度不变. 则对于可测集 $E$，$T(E)$必是可测集.

**证** 对任意的试验集 $V$，记 $U=T^{-1}(V)$，有 $T(U)=V$，则

$$\begin{aligned}
&m^*(V\cap T(E))+m^*(V\cap(T(E))^c)\\
&=m^*(T(U)\cap T(E))+m^*(T(U)\cap T(E^c))\\
&=m^*(T(U\cap E))+m^*(T(U\cap E^c))\\
&=m^*(U\cap E)+m^*(U\cap E^c)\\
&=m^*(U)=m^*(T(U))=m^*(V).
\end{aligned}$$

所以 $T(E)$是可测集.

**定理 3.4.7(平移不变性)** 设可测集 $E\subset\mathbf{R}^n$，$a\in\mathbf{R}^n$，记 $E+\{a\}=\{x+a:x\in E\}$. 则 $E+\{a\}$为可测集，且有 $m(E+\{a\})=m(E)$.

**证** 令 $T(x)=x+a$，由命题 3.4.6 及外测度的平移不变性即得.

**命题 3.4.8(距离外测度性质)** 设 $A,B\subset\mathbf{R}^n$，若 $d(A,B)>0$，则

$$m^*(A\cup B)=m^*(A)+m^*(B).$$

**证** 记 $r=d(A,B)$，令 $G=\left\{x:d(x,A)<\frac{r}{2}\right\}$，则 $A\subset G$ 及 $B\subset G^c$. 易见 $G$ 为开集，从而 $G$ 为可测集，现在取 $A\cup B$ 为试验集，得

$$m^*(A\cup B)=m^*((A\cup B)\cap G)+m^*((A\cup B)\cap G^c)=m^*(A)+m^*(B).$$

## 3.5 不可测集

我们已经知道,开集、闭集、$F_\sigma$ 集、$G_\delta$ 集、Borel 集皆为可测集. 自然就有一个重要的问题:不可测集是否存在? 也就是问:可测集类 $M$ 是否是 $P(\mathbf{R}^n)$的真子集? 这个问题的答案在 3.3 节一开始就提到了. 本节我们就这个问题进行更具体的探讨.

有时可以用比较基数大小的方法来判断集合的真包含问题. 例如,记 $A$ 为代数数集,则 $A\subset\mathbf{R}^1$,如能证明$\overline{\overline{A}}<c$,则 $A$ 必为 $\mathbf{R}^1$ 的真子集,从而证明了超越数的存在.

所以我们先来研究可测集类 $M$ 的基数. 为了方便起见,下面在 $\mathbf{R}^1$ 中讨论问题,若要推广到 $\mathbf{R}^n$ 的情况,并无本质上的困难.

**命题 3.5.1** 在 $\mathbf{R}^1$ 中,可测集类 $M$ 的基数为 $2^c$.

**证** 由 $M\subset P(\mathbf{R}^1)$知$\overline{\overline{M}}\leqslant 2^c$. 另一方面,Cantor 集 $C$ 是 $\mathbf{R}^1$ 中具有连续基数 $c$ 的零测集,对任意的 $E\in P(C)$,有 $m^*(E)\leqslant m^*(C)=0$,可知 $E\in M$,从而得 $P(C)\subset M$. 所以有$\overline{\overline{M}}\geqslant\overline{\overline{P(C)}}=2^c$. 合之,有$\overline{\overline{M}}=2^c$.

因此可知,可测集类 $M$ 的基数与 $\mathbf{R}^1$ 的幂集的基数是相等的,从而不能用比较基数大小的方法来判断不可测集是否存在,但下面的命题说明了(在承认选择公理的前提下)不可测集的存在.

**命题 3.5.2** 在 $\mathbf{R}^1$ 中,不可测集是存在的.

**证** 以 $\mathbf{Q}$ 表示有理数集合. 在 $\mathbf{R}^1$ 中,对任意的 $x,y\in(0,1)$,若 $x-y\in\mathbf{Q}$,则称 $x$ 与 $y$ 等价,记为 $x\sim y$. 根据等价关系"$\sim$"把$(0,1)$中的点进行分类,在每一个等价类中取出一点作为代表,这些"代表"的全体记作 $S$. 记$(-1,1)\cap\mathbf{Q}=\{r_1,r_2,\cdots,r_k,\cdots\}$,令 $S_k=\{x+r_k:x\in S\}(k=1,2,\cdots)$,得集列$\{S_k\}$.

先证$\{S_k\}$中的集合是互不相交的. 若 $S_i\cap S_j\neq\varnothing$,则存在 $x,y\in S$,使 $x+r_i=y+r_j$,于是 $x-y=r_j-r_i\in\mathbf{Q}$,即 $x$ 与 $y$ 属于同一等价类. 由 $S$ 的构造知 $x=y$,从而可得 $r_i=r_j$,即得 $i=j$.

再证$(0,1)\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}S_k\subset(-1,2)$. 设 $x\in(0,1)$,则存在 $y\in S$,使 $x-y\in\mathbf{Q}$. 于是存

在 $k$ 使 $x-y=r_k$，即有 $x=y+r_k\in S_k\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}S_k$，所以 $(0,1)\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}S_k$. 而对每个 $k$，有 $S_k\subset(-1,2)$，知 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}S_k\subset(-1,2)$.

现在设 $S$ 是可测集，则有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}m(S_k)=m(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}S_k)\leqslant m(-1,2)=3$，再由测度的平移不变性，知对每个 $k$，有 $m(S_k)=m(S)$，所以必有 $m(S)=0$. 于是可得 $1=m(0,1)\leqslant m(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}S_k)=0$，矛盾. 所以 $S$ 必定不是 $\mathbf{R}^1$ 中的可测集.

若把命题 3.5.2 的证明作些修改，可以得到：每个正测度集具有不可测的子集.

## 3.6 例题选讲

**例 3.6.1** 设 $G$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集，$E$ 是零测集，则 $\overline{G}=\overline{G\setminus E}$.

**证** 设 $x\in\overline{G}$，对任意的 $\delta>0$，有 $B(x,\delta)\cap G\neq\varnothing$. 若 $B(x,\delta)\cap(G\setminus E)=\varnothing$，即 $(B(x,\delta)\cap G)\cap E^c=\varnothing$，于是 $(B(x,\delta)\cap G)\subset E$，得 $m(E)\geqslant m(B(x,\delta)\cap G)>0$，矛盾. 所以 $B(x,\delta)\cap(G\setminus E)\neq\varnothing$，即 $x\in\overline{G\setminus E}$，故 $\overline{G}\subset\overline{G\setminus E}$.

再由 $G\supset G\setminus E$，知 $\overline{G}\supset\overline{G\setminus E}$. 合之，有 $\overline{G}=\overline{G\setminus E}$.

**例 3.6.2** 试问是否存在闭集 $F$，$F\subset[a,b]$ 且 $F\neq[a,b]$，而 $m(F)=b-a$?

**解** 不存在. 若这样的 $F$ 存在，因为 $F$ 为闭集，于是 $a=\inf F$ 与 $b=\sup F$ 皆属于 $F$，从而不难知道 $[a,b]\setminus F=(a,b)\setminus F$ 为非空开集，所以可推出 $m([a,b]\setminus F)>0$. 另一方面，由 $m([a,b]\setminus F)=m([a,b])-m(F)=b-a-m(F)=0$，矛盾.

**例 3.6.3** 设 $\{E_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的可测集列，则 $m(\varliminf\limits_{k\to\infty}E_k)\leqslant\varliminf\limits_{k\to\infty}m(E_k)$.

**证** 对每个 $k$，令 $B_k=\bigcap\limits_{i=k}^{\infty}E_i$，则 $\{B_k\}$ 是递增可测集列，由定理 3.3.7，有

$$m(\varliminf_{k\to\infty}E_k)=m(\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k)=\lim_{k\to\infty}m(B_k)\leqslant\varliminf_{k\to\infty}m(E_k).$$

**例 3.6.4** 设 $\{E_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的集列，则 $m^*(\varliminf\limits_{k\to\infty}E_k)\leqslant\varliminf\limits_{k\to\infty}m^*(E_k)$.

**证** 对每个 $k$，作 $E_k$ 的等测包 $H_k$，由上例知

$$m^*(\varliminf_{k\to\infty}E_k)\leqslant m(\varliminf_{k\to\infty}H_k)\leqslant\varliminf_{k\to\infty}m(H_k)=\varliminf_{k\to\infty}m^*(E_k).$$

**例 3.6.5** 设 $\{E_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的递增集列，则 $m^*(\lim\limits_{k\to\infty}E_k)=\lim\limits_{k\to\infty}m^*(E_k)$.

**证** 因为$\{E_k\}$为递增集列，故有$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}E_k=\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}E_k$. 再由$\{m^*(E_k)\}$为递增数列，知$\lim\limits_{k\to\infty}m^*(E_k)$存在，所以$m^*(\lim\limits_{k\to\infty}E_k)=m^*(\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}E_k)\leqslant\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}m^*(E_k)=\lim\limits_{k\to\infty}m^*(E_k)$.

另一方面，对每个$k$，有$E_k\subset\lim\limits_{k\to\infty}E_k$，知$m^*(E_k)\leqslant m^*(\lim\limits_{k\to\infty}E_k)$，再由$\lim\limits_{k\to\infty}m^*(E_k)$存在，所以有$\lim\limits_{k\to\infty}m^*(E_k)\leqslant m^*(\lim\limits_{k\to\infty}E_k)$.

合之，有$m^*(\lim\limits_{k\to\infty}E_k)=\lim\limits_{k\to\infty}m^*(E_k)$.

**例 3.6.6** 设$\{E_k\}$是$[0,1]$中的可测集合列，且有$m(E_k)=1(k=1,2,\cdots)$，试证明：$m(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_k)=1$.

**证** 对每个$k$，令$A_k=[0,1]\setminus E_k$，则有$m(A_k)=0$. 因为$[0,1]\setminus(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_k)=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$，以及$0\leqslant m(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k)\leqslant\sum\limits_{k=1}^{\infty}m(A_k)=0$，所以$m(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_k)=m([0,1])-m(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k)=1-0=1$.

**例 3.6.7** 设$E\subset\mathbf{R}^1$且$m^*(E)>0,0<\alpha<m^*(E)$，试证明：存在$E$的子集$A$，使得$m^*(A)=\alpha$.

**证** 对$t\in(0,+\infty)$，令$f(t)=m^*(E\cap[-t,t])$. 对任意的$s,t\in(0,+\infty)$，不妨设$s\leqslant t$，有$f(t)\leqslant f(s)+m^*([-t,t]\setminus[-s,s])$，从而有$|f(t)-f(s)|\leqslant2|t-s|$，所以$f(t)$在$[0,+\infty)$上连续.

由$\lim\limits_{t\to0}f(t)=0$及$\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=\lim\limits_{k\to+\infty}m^*(E\cap[-k,k])=m^*(E)$，再由连续函数的介值定理，知对$0<\alpha<m^*(E)$，存在$s$使$f(s)=\alpha$，故$A=E\cap[-s,s]$为所求之集.

**例 3.6.8** 设$E\subset\mathbf{R}^1$且$0<\alpha<m(E)$，试证明：存在无内点的有界闭集$F$，使得$F\subset E$，且$m(F)=\alpha$.

**证** 令$E_1=E\setminus\mathbf{Q}$，则$E_1$无内点，且$m(E_1)=m(E)>\alpha$，故存在闭集$F_1\subset E_1$，使$m(F_1)>\alpha$. 再由上例证明知存在$t$，使$m(F_1\cap[-t,t])=\alpha$. 现在令$F=F_1\cap[-t,t]$，则$m(F)=\alpha$及$F\subset F_1\subset E_1\subset E$，因为$E_1$无内点，故$F$无内点；因为$F_1$为闭集，故$F$为有界闭集.

**例 3.6.9** 试在$\mathbf{R}^1$中作一个由某些无理数构成的闭集$F$，使得$m(F)>0$.

**证** 记$\mathbf{Q}=\{r_1,r_2,\cdots,r_k,\cdots\}$，令$G=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left(r_k-\dfrac{1}{2^k},r_k+\dfrac{1}{2^k}\right)$，则$m(G)\leqslant2$. 再令$F=\mathbf{R}^1\setminus G$，由$m(\mathbf{R}^1)=m(G)+m(F)$，知$m(F)>0$.

**例 3.6.10** 若 $E$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的零测集，则 $E^c$ 是稠密集.

**证** 由 $m(E)=0$，知 $\mathring{E}=\varnothing$. 再由命题 2.3.8，知 $(E^c)^-=(E^\circ)^c=\varnothing^c=\mathbf{R}^n$，所以 $E^c$ 是稠密集.

**例 3.6.11** 设有 $f:[a,b]\to\mathbf{R}^1$. 若对于 $[a,b]$ 中任一可测集 $E$，$f(E)$ 必为 $\mathbf{R}^1$ 中的可测集，试证明：对于 $[a,b]$ 中任一零测集 $Z$，必有 $m(f(Z))=0$.

**证** 设 $Z$ 为 $[a,b]$ 中的零测集，若 $m(f(Z))>0$，由命题 3.5.2 后的说明，知存在不可测集 $A\subset f(Z)$，令 $E=Z\cap f^{-1}(A)$. 于是因 $E$ 为零测集 $Z$ 的子集，故 $E$ 为可测集. 但是 $f(E)=f(Z\cap f^{-1}(A))=f(Z)\cap A=A$ 为不可测集，矛盾.

**例 3.6.12** 证明：$\mathbf{R}^n$ 中的点集 $E=\{x=(\xi,\eta):\xi$ 与 $\eta$ 之一是有理数$\}$ 是零测集.

**证** 设有理数集 $\mathbf{Q}=\{r_1,r_2,\cdots,r_k,\cdots\}$，则

$$E\subset(\mathbf{Q}\times\mathbf{R}^1)\cup(\mathbf{R}^1\times\mathbf{Q})=\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(\{r_k\}\times\mathbf{R}^1)\right)\cup\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(\mathbf{R}^1\times\{r_k\})\right).$$

对每个 $k$，有 $m^*(\{r_k\}\times\mathbf{R}^1)=m^*(\mathbf{R}^1\times\{r_k\})=0$，故 $m^*(E)=0$，即 $E$ 是零测集.

**例 3.6.13** 设 $A\subset\mathbf{R}^1$，$m(A)>0$，证明：存在 $x,y\in A$，使得 $0\neq x-y\in\mathbf{Q}$.

**证** 取 $n$ 充分大，使得 $S=A\cap[-n,n]$ 为正测度集. 记 $\mathbf{Q}\cap[0,1]=\{r_1,r_2,\cdots,r_k,\cdots\}$，对每个 $k$，令 $S_k=S+\{r_k\}$，则有 $m(S_k)=m(S)$，故 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}m(S_k)=\infty$. 若 $\{S_k\}$ 是互不相交的可测集列，则有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}m(S_k)=m\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}S_k\right)\leqslant m([-n-1,n+1])<\infty$，推出矛盾. 所以有 $i\neq j$ 使 $S_i\cap S_j\neq\varnothing$，则存在 $x,y\in S\subset A$，使 $x+r_i=y+r_j$，于是有 $0\neq x-y=r_j-r_i\in\mathbf{Q}$.

**例 3.6.14** 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，$H$ 是包含 $E$ 的可测集，若 $H\setminus E$ 中的任一可测子集皆为零测集，证明：$m(H)=m^*(E)$.

**证** 作 $E$ 的等测包 $S$，则易知 $H\setminus S$ 是 $H\setminus E$ 的可测子集，故 $m(H\setminus S)=0$. 再由 $m^*(E)\leqslant m(H\cap S)\leqslant m(S)=m^*(E)$，知 $m^*(E)=m(H\cap S)$. 所以有

$$m(H)=m(H\setminus S)+m(H\cap S)=m^*(E).$$

**例 3.6.15** 设 $A,B\subset\mathbf{R}^n$，$A\cup B$ 是可测集且 $m(A\cup B)<\infty$，若

$$m(A\cup B)=m^*(A)+m^*(B).$$

证明：$A,B$ 皆为可测集.

**证** 取 $B$ 的等测包 $H$，令 $K=(A\cup B)\setminus H$，则 $A\cup B\subset H\cup K$，故有

$$m(H)+m(K)\geqslant m(A\cup B)=m^*(A)+m^*(B).$$

由 $m(H)=m^*(B)<\infty$，有 $m(K)\geqslant m^*(A)$. 因为可测集 $K\subset A$，取 $A$ 为试验集，有

$$m^*(A)=m^*(A\cap K)+m^*(A\cap K^c)=m(K)+m^*(A\setminus K).$$

所以有 $m^*(A\setminus K)=0$，即 $A\setminus K$ 为可测集，知 $A=(A\setminus K)\cup K$ 为可测集.

同理可证 $B$ 为可测集.

**例 3.6.16**　设 $\Gamma$ 是由 $\mathbf{R}^1$ 中某些互不相交的正测度集形成的集族，试证明：$\Gamma$ 是至多可数的.

**证**　对每个 $i,k$，令 $\Gamma_{i,k}=\left\{E\in\Gamma: m(E\cap[-i,i])>\frac{1}{k}\right\}$，则有 $\Gamma=\bigcup_{i,k}\Gamma_{i,k}$. 事实上，若 $E\in\Gamma$，由 $\lim\limits_{i\to\infty}m(E\cap[-i,i])=m(E)>0$，知存在 $i,k$，使 $m(E\cap[-i,i])>1/k$，故 $E\in\Gamma_{i,k}$，于是有 $\Gamma\subset\bigcup_{i,k}\Gamma_{i,k}$. 另一方面，显然有 $\Gamma\supset\bigcup_{i,k}\Gamma_{i,k}$，所以 $\Gamma=\bigcup_{i,k}\Gamma_{i,k}$.

若 $\Gamma_{i,k}$ 为无限集，从中选取集列 $\{E_j\}$，则

$$m([-i,i])\geqslant m\left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\right)\cap[-i,i]\right)=\sum_{j=1}^{\infty}m(E_j\cap[-i,i])=\infty.$$

得矛盾，所以每个 $\Gamma_{i,k}$ 为有限集，从而得 $\Gamma$ 是至多可数集.

**例 3.6.17**　设 $E\subset\mathbf{R}^1$，若存在 $q(0<q<1)$，使得对任一开区间 $(a,b)$，都有开区间列 $\{I_n\}$：

$$E\cap(a,b)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}m(I_n)<q(b-a).$$

试证明：$m(E)=0$.

**证**　对任一开区间 $(a,b)$，显然有 $m^*(E\cap(a,b))<q(b-a)$.

若 $m^*(E)>0$，由 $m^*(E)<\frac{1}{q}m^*(E)$，取 $E$ 的 $L$-覆盖 $\{I_k\}$，使 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|I_k|<\frac{1}{q}m^*(E)$，

即有 $m^*(E)>q\sum\limits_{k=1}^{\infty}|I_k|$. 对每个 $k$，有 $m^*(E\cap I_k)\leqslant q|I_k|$，则

$$m^*(E)=m^*\left(E\cap\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k\right)\right)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m^*(E\cap I_k)<q\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|.$$

得矛盾，故必有 $m^*(E)=0$，即 $m(E)=0$.

**例 3.6.18**　设 $m^*(E)<\infty$，试证明：存在包含 $E$ 的 $G_\delta$ 集 $H$，使得对于任一可测集 $A$，有

$$m^*(E\cap A)=m(H\cap A).$$

**证**　取 $E$ 的等测包 $H$，对可测集 $A$ 分别取试验集 $E$，$H$，有

$$m^*(E)=m^*(E\cap A)+m^*(E\cap A^c),$$
$$m(H)=m(H\cap A)+m(H\cap A^c).$$

由 $m(H)=m^*(E)<\infty$ 及 $m^*(E\cap A^c)\leqslant m(H\cap A^c)$，知 $m^*(E\cap A)\geqslant m(H\cap A)$. 另一方面，显然有 $m^*(E\cap A)\leqslant m(H\cap A)$，所以 $m^*(E\cap A)=m(H\cap A)$.

**例 3.6.19** 设可测集 $E\subset\mathbf{R}^n$，记 $-E=\{-x:x\in E\}$，则 $-E$ 是可测集，且 $m(-E)=m(E)$.

**证** 令 $T(x)=-x$，则 $T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是双射及 $T(E)=-E$. 与定理 3.2.3 的证明类似，知 $T$ 保持点集的外测度不变，再由命题 3.4.6 知 $-E$ 是可测集，且有 $m(-E)=m(E)$.

**例 3.6.20** 设 $E\subset\mathbf{R}^1$ 是可测集，若对任意的 $x\in(-1,1)$，$x$ 与 $-x$ 之中必有一点属于 $E$，证明：$m(E)\geqslant 1$.

**证** 记 $-E=\{-x:x\in E\}$，有 $(-1,1)\subset E\cup(-E)$. 由上例知 $m(-E)=m(E)$，再由 $m(E)+m(-E)\geqslant 2$，所以 $m(E)\geqslant 1$.

**例 3.6.21** 设 $f(x)=x^3$，若 $E\subset\mathbf{R}^1$ 为可测集，证明：$f(E)$ 为可测集.

**证** 设 $E$ 为有界零测集，$E\subset(-n,n)$. 对任意 $\varepsilon>0$，存在开集 $G$，使得 $E\subset G\subset(-n,n)$ 及 $m(G)<\frac{\varepsilon}{3n^2}$. 把开集 $G$ 表示为构成区间之并：$G=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k)$，则

$$m^*(f(E))\leqslant m^*(f(G))=m\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k^3,b_k^3)\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}(b_k^3-a_k^3)$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k)(b_k^2+b_k a_k+a_k^2)\leqslant 3n^2m(G)<\varepsilon.$$

所以 $m^*(f(E))=0$，即 $f(E)$ 为零测集.

再设 $E$ 为一般零测集，可知 $f(E)=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}f\big(E\cap(-n,n)\big)$ 为零测集.

最后设 $E$ 为可测集，则 $E=H\setminus Z$，这里，$H$ 是 $G_\delta$ 集，$Z$ 是零测集. 设 $H=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}G_k$，这里，每个 $G_k$ 是开集，知 $f(G_k)$ 为开集，由 $f$ 为双射知 $f(H)=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}f(G_k)$ 为 $G_\delta$ 集. 再由 $f(Z)$ 为零测集，得 $f(E)=f(H)\setminus f(Z)$ 为可测集.

# 习题三

1. 设 $A,B\subset\mathbf{R}^n$ 且 $m^*(A)=0$，证明：$m^*(A\cup B)=m^*(B)=m^*(B\setminus A)$.

2. 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，若对任意的 $x\in E$，存在 $\delta>0$，使 $m^*(B(x,\delta)\cap E)=0$，证明：$m^*(E)=0$.

3. 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，若对任意的开矩体 $I$，有 $m^*(E\cap I)=0$，证明：$m^*(E)=0$.

4. 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，若 $\mathring{E}\neq\varnothing$，则 $m^*(E)>0$.

5. 设 $A,B\subset\mathbf{R}^n$，$A\subset B$，$A$ 是可测集且有 $m(A)=m^*(B)<\infty$. 试证明：$B$ 是可测集.

6. 设 $A,B\subset\mathbf{R}^n$ 是可测集，证明：$m(A\cup B)+m(A\cap B)=m(A)+m(B)$.

7. 证明：$E$ 是可测集$\Leftrightarrow\forall A\subset E,B\subset E^c$，有 $m^*(A\cup B)=m^*(A)+m^*(B)$.

8. 设 $E\subset[a,b]$，若 $m(E)=b-a$，则$\overline{E}=[a,b]$.

9. 设 $A,B$ 是$[0,1]$中的可测集，且有 $m(A)=m(B)=\dfrac{2}{3}$，试证明：$m(A\cap B)\geqslant\dfrac{1}{3}$.

10. 试证明 $E\subset\mathbf{R}^n$ 是可测集的充分必要条件是：对于任意的 $\varepsilon>0$，存在开集 $G_1$ 与 $G_2$，使得 $G_1\supset E$ 且 $G_2\supset E^c$，且 $m(G_1\cap G_2)<\varepsilon$.

11. 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，证明 $E$ 是可测集的充分必要条件是：对任意的 $\varepsilon>0$，存在开集 $G\supset E$，存在闭集 $F\subset E$，使得 $m(G\setminus F)<\varepsilon$.

12. 设 $E\subset\mathbf{R}^n$ 且 $m^*(E)<\infty$，若有 $m^*(E)=\sup\{m(F):F\subset E$ 是有界闭集$\}$. 证明：$E$ 是可测集.

13. 设 $E$ 为零测集，$A$ 为不可测集，证明：$A\cap E^c$ 为不可测集.

14. 设 $E$ 为不可测集，试证明：存在 $x\in E$，使得对于任意的 $\delta>0$，$E\cap B(x,\delta)$ 为不可测集.

15. 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，证明：$m^*(E)=\inf\{m(G):E\subset G,G$ 为开集$\}$.

16. 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，若存在可测集列$\{A_k\}$，$\{B_k\}$，使得 $A_k\subset E\subset B_k(k=1,2,\cdots)$，且有$\lim\limits_{k\to\infty}m(B_k\setminus A_k)=0$，证明：$E$ 是可测集.

17. 设可测集 $E\subset\mathbf{R}^n$,证明:存在 $E$ 的紧子集列$\{K_i\}$,使 $K_1\subset K_2\subset\cdots\subset K_i\subset\cdots$,且 $m(E\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}K_i)=0$.

18. 设 $A$ 是可测集,证明:$m^*(A\cup B)+m^*(A\cap B)=m(A)+m^*(B)$.

19. 设 $A\subset[0,1]$可测,$m(A)=1$,则对任意的 $B\subset[0,1]$,有 $m^*(A\cap B)=m^*(B)$.

20. 设 $E\subset\mathbf{R}$ 且 $m^*(E)>0$,则对任意的 $q(0<q<1)$,存在开区间$(a,b)$,使

$$m^*\big(E\cap(a,b)\big)>q(b-a).$$

21. 设 $E_1,E_2,\cdots,E_k$ 是$[0,1]$中的可测集,且有 $\sum_{i=1}^{k}m(E_i)>k-1$,试证明:$m(\bigcap_{k=1}^{k}E_k)>0$.

22. 设 $E$ 为可测集,且 $m(E)>0$,试证明:存在 $x\in E$,使得对于任意的 $\delta>0$,有 $m(E\cap B(x,\delta))>0$.

23. 设$\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$是开集族,$E\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$. 若对每个 $\lambda\in\Lambda$,$E\cap G_\lambda$ 是可测集,证明:$E$ 是可测集.

24. 设 $E\subset\mathbf{R}^n$,对 $\lambda\in\mathbf{R}$,记 $\lambda E=\{\lambda x:x\in E\}$. 若 $E$ 是零测集,证明:$\lambda E$ 是零测集.

25. 设 $E\subset\mathbf{R}^n$,对 $\lambda\in\mathbf{R}$,记 $\lambda E=\{\lambda x:x\in E\}$. 若 $E$ 是可测集,证明:$\lambda E$ 是可测集.

26. 设 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 为连续函数,若对于 $\mathbf{R}^n$ 中任一零测集 $Z$,$f(Z)$为 $\mathbf{R}$ 中的零测集,证明:对于 $\mathbf{R}^n$ 中任一可测集 $E$,$f(E)$为 $\mathbf{R}$ 中的可测集.

27. 设 $E\subset\mathbf{R}^n$,若对任意开集 $G\subset\mathbf{R}^n$,有 $m^*(G)=m^*(G\cap E)+m^*(G\cap E^c)$,则 $E$ 为可测集.

28. 设 $I=[0,1]\times[0,1]$,令 $E=\left\{(x,y)\in I:|\sin x|<\frac{1}{2},\cos(x+y)\text{是无理数}\right\}$. 试求 $m(E)$.

29. 设 $A,B\subset\mathbf{R}$,若 $A$ 是零测集,证明:$A\times B$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的零测集.

30. 设 $A,B$ 是 $\mathbf{R}$ 中的可测集,证明:$A\times B$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的可测集.

31. 设 $E\subset\mathbf{R}$ 是可测集,$a\in\mathbf{R}$,$\delta>0$,若对于满足$|x|<\delta$ 的 $x$,$a+x$ 与 $a-x$ 之中必有一点属于 $E$,证明:$m(E)\geqslant\delta$.

32. 设 $E\subset[0,1]$是可测集，且 $m(E)\geqslant\varepsilon>0$，$x_i\in[0,1]$($i=1,2,\cdots,n$)，其中 $n>\frac{2}{\varepsilon}$. 试证明：$E$ 中存在两个点，其距离等于$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$中某两个点之间的距离.

33. 设 $W$ 是$[0,1]$中的不可测集，试证明：存在 $\varepsilon$($0<\varepsilon<1$)，使得对于$[0,1]$中的任一满足 $m(E)\geqslant\varepsilon$ 的可测集 $E$，$W\cap E$ 是不可测集.

34. 设$\{B_k\}$是 $\mathbf{R}^n$ 中的递减可测集列，$m^*(A)<\infty$. 对每个 $k$，令 $E_k=A\cap B_k$，$E=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_k$. 试证明：$\lim\limits_{k\to\infty}m^*(E_k)=m^*(E)$.

35. 设 $E\subset[a,b]$是可测集，$I_k\subset[a,b]$($k=1,2,\cdots$)是开区间列，满足 $m(I_k\cap E)\geqslant\frac{2}{3}|I_k|$($k=1,2,\cdots$). 试证明：$m((\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}I_k)\cap E)\geqslant\frac{1}{3}m(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}I_k)$.

36. 证明：在 $\mathbf{R}$ 中，每个正测度集具有不可测的子集.

# 4 可测函数

为了建立 Lebesgue 积分的理论，本章将引进可测函数，它是比连续函数更为广泛的一类函数. 我们将讨论可测函数的性质，讨论可测函数与连续函数的关系，并研究可测函数列的几种收敛概念.

## 4.1 可测函数的定义及性质

有了可测集的概念，我们就可以定义可测函数. 若不加说明，以下提到的函数均指广义实值函数.

**定义 4.1.1** 设 $f(x)$是定义在可测集 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的广义实值函数，若对于任意实数 $t$，点集$\{x\in E: f(x)>t\}$是可测集，则称 $f(x)$是 $E$ 上的**可测函数**.

若在一个问题中所讨论的函数定义域都是 $E$，则常把上述定义中的点集简记作$\{x: f(x)>t\}$.

**例 4.1.1** 若 $f(x)$是$[a,b]$上的单调函数，则 $f(x)$是$[a,b]$上的可测函数.

**证** 容易看到，对于任意 $t\in\mathbf{R}^1$，点集$\{x\in[a,b]: f(x)>t\}$或为区间，或为单点集，或为空集. 因而必为可测集，故 $f(x)$是$[a,b]$上的可测函数.

**例 4.1.2** 若 $f(x)$是零测集 $E$ 上的函数，则 $f(x)$是 $E$ 上的可测函数.

**证** 显然，对于任意 $t\in\mathbf{R}^1$，点集$\{x\in E: f(x)>t\}$是零测集，当然是可测的. 由此知 $f(x)$是 $E$ 上的可测函数.

**定理 4.1.1** 设 $f(x)$是定义在可测集 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的广义实值函数，则下列条件等价：

(1) $f(x)$是 $E$ 上的可测函数；

(2) 对任意实数 $t$，点集$\{x: f(x)\leqslant t\}$是可测集；

(3) 对任意实数 $t$，点集$\{x: f(x)<t\}$是可测集；

(4) 对任意实数 $t$，点集$\{x: f(x)\geqslant t\}$是可测集.

**证** 只要注意到下述等式即可明了.

(1) $\Rightarrow$(2)：$\{x: f(x)\leqslant t\}=E\setminus\{x: f(x)>t\}$.

(2) $\Rightarrow$(3)：$\{x:f(x)<t\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{x:f(x)\leqslant t-\frac{1}{k}\right\}$.

(3) $\Rightarrow$(4)：$\{x:f(x)\geqslant t\}=E\setminus\{x:f(x)<t\}$.

(4) $\Rightarrow$(1)：$\{x:f(x)>t\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left\{x:f(x)\geqslant t+\frac{1}{k}\right\}$.

**推论 4.1.2** 若 $f(x)$是 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的可测函数，则对于任意的 $t\in\overline{\mathbf{R}}$，任意的区间 $I\subset\mathbf{R}^1$，集合$\{x:f(x)=t\}$，$f^{-1}(I)$皆为可测.

**证** 比如 $t\in\mathbf{R}^1$，则$\{x:f(x)=t\}=\{x:f(x)\geqslant t\}\setminus\{x:f(x)>t\}$. 由定理 4.1.1 可立得结论. 又比如设 $I=(a,b)$，则 $f^{-1}(I)=\{x:f(x)>a\}\cap\{x:f(x)<b\}$. 由定理 4.1.1 和定理 3.3.2 可立得结论. 其他情况也不难证明.

**推论 4.1.3** 设 $f(x)$是定义在可测集 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的广义实值函数，则下列条件等价：

(1) $f(x)$是 $E$ 上的可测函数；

(2) 对任意开集 $G\subset\mathbf{R}^1$，$f^{-1}(G)$与$\{x:f(x)=+\infty\}$皆为可测集.

**证** (1)$\Rightarrow$(2)：设开集 $G=\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k$，这里，每个 $I_k$ 是开区间. 由推论 4.1.2 可以知道$\{x:f(x)=+\infty\}$及每个 $f^{-1}(I_k)$都是可测集，所以 $f^{-1}(G)=\bigcup_{k=1}^{\infty}f^{-1}(I_k)$也是可测集.

(2)$\Rightarrow$(1)：对任意实数 $t$，$\{x:f(x)>t\}=f^{-1}((t,+\infty))\cup\{x:f(x)=+\infty\}$为可测集，所以 $f(x)$是 $E$ 上的可测函数.

上述推论结合可测函数的定义可立得下述推论.

**推论 4.1.4** 设 $f(x)$是定义在可测集 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的实值函数，则下列条件等价：

(1) $f(x)$是 $E$ 上的可测函数；

(2) 对任意开集 $G\subset\mathbf{R}^1$，$f^{-1}(G)$为可测集.

**推论 4.1.5** 若 $f(x)$是可测集 $E$ 上的连续函数，则 $f(x)$是 $E$ 上的可测函数.

**证** 由 $f(x)$是 $E$ 上的连续函数及定理 2.5.1，可知对任意开集 $G\subset\mathbf{R}^1$，存在开集 $H\subset\mathbf{R}^n$，使 $f^{-1}(G)=H\cap E$，故 $f^{-1}(G)$是可测集，从而得 $f(x)$是 $E$ 上的可测函数.

**例 4.1.3** 设 $E\subset\mathbf{R}^n$，则 $E$ 是可测集当且仅当特征函数$\chi_E(x)$是可测函数.

**证**　必要性. 设 $E$ 是可测集,则对任意实数 $t$ 有

$$\{x\in\mathbf{R}^n:\chi_E(x)>t\}=\begin{cases}\mathbf{R}^n, & t<0;\\ E, & 0\leqslant t<1;\\ \varnothing, & t\geqslant 1.\end{cases}$$

从而知特征函数$\chi_E(x)$是可测函数.

充分性. 由特征函数$\chi_E(x)$是可测函数,知 $E=\{x\in\mathbf{R}^n:\chi_E(x)>0\}$是可测集.

**例 4.1.4**　若 $f(x)$定义在可数个可测集 $E_k(k=1,2,\cdots)$的并集 $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$ 上,且 $f(x)$在每个 $E_k$ 上为可测,则 $f(x)$在 $E$ 上也为可测.

**证**　对任意实数 $t$,$\{x\in E:f(x)>t\}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{x\in E_k:f(x)>t\}$为可测集,所以 $f(x)$是 $E$ 上的可测函数.

**例 4.1.5**　若 $f(x)$是 $E$ 上的可测函数,而 $A$ 是 $E$ 的可测子集,则 $f(x)$是 $A$ 上的可测函数.

**证**　对任意实数 $t$,$\{x\in A:f(x)>t\}=\{x\in E:f(x)>t\}\cap A$ 为可测集,所以 $f(x)$是 $A$ 上的可测函数.

**定义 4.1.2**　设 $P(x)$是一个与 $E$ 中的点 $x$ 有关的命题,若除了 $E$ 中的某个零测集以外,$P(x)$皆为真,则称 $P(x)$在 $E$ 上**几乎处处成立**,记作 $P(x)$,$a.e.$ 于 $E$.

设 $f(x)$,$g(x)$是 $E$ 上的广义实函数,若 $m(\{x\in E:f(x)\neq g(x)\})=0$,则称函数 $f(x)$,$g(x)$在 $E$ 上**几乎处处相等**,也称 $f(x)$与 $g(x)$在 $E$ 上**对等**. 记作 $f(x)=g(x)$,$a.e.$ 于 $E$(或 $f\sim g$).

设 $f(x)$是 $E$ 上的广义实函数,若 $m(\{x\in E:|f(x)|=+\infty\})=0$,则称函数 $f(x)$在 $E$ 上**几乎处处有限**,记作$|f(x)|<+\infty$,$a.e.$ 于 $E$.

设 $f(x)$、$f_1(x)$、$f_2(x)$,$\cdots$,$f_k(x)$,$\cdots$是 $E$ 上的广义实函数,若存在零测集 $Z\subset E$,使$\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$,$x\in E\setminus Z$,则称函数列$\{f_k(x)\}$在 $E$ 上**几乎处处收敛**于 $f(x)$,记作$\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$,$a.e.$ 于 $E$(或 $f_k(x)\xrightarrow{a.e.}f(x)$).

**定理 4.1.6**　设 $f(x)$,$g(x)$是可测集 $E$ 上的广义实函数,若 $f(x)=g(x)$,$a.e.$ 于 $E$,且 $f(x)$是 $E$ 上的可测函数,则 $g(x)$是 $E$ 上的可测函数.

**证** 记 $A=\{x\in E: f(x)\neq g(x)\}$，由 $A$ 为零测集，知 $g(x)$ 是 $A$ 上的可测函数. 再由 $f(x)$ 是 $E$ 上的可测函数及 $E\setminus A$ 是 $E$ 的可测子集，知 $f(x)$ 是 $E\setminus A$ 上的可测函数，从而得 $g(x)$ 是 $E\setminus A$ 上的可测函数. 所以 $g(x)$ 是 $E=(E\setminus A)\cup A$ 上的可测函数.

**定理 4.1.7** 设 $\{f_k(x)\}$ 是 $E$ 上的可测函数列，则下列函数均为可测函数：

(1) $\sup\limits_{k\geq 1}\{f_k(x)\}$；(2) $\inf\limits_{k\geq 1}\{f_k(x)\}$；(3) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\{f_k(x)\}$；(4) $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\{f_k(x)\}$.

**证** (1) 对于任意实数 $t$，由 $\{x: \sup\limits_{k\geq 1}\{f_k(x)\}>t\}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{x: f_k(x)>t\}$，知 $\sup\limits_{k\geq 1}\{f_k(x)\}$ 是 $E$ 上的可测函数.

(2) 由 $\inf\limits_{k\geq 1}\{f_k(x)\}=-\sup\limits_{k\geq 1}\{-f_k(x)\}$，知 $\inf\limits_{k\geq 1}\{f_k(x)\}$ 是 $E$ 上的可测函数.

(3) 由 $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\{f_k(x)\}=\inf\limits_{i\geq 1}\{\sup\limits_{k\geq i}\{f_k(x)\}\}$，知 $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\{f_k(x)\}$ 是 $E$ 上的可测函数.

(4) 由 $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\{f_k(x)\}=-\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\{-f_k(x)\}$，知 $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\{f_k(x)\}$ 是 $E$ 上的可测函数.

**推论 4.1.8** 若可测函数列 $\{f_k(x)\}$ 在 $E$ 上几乎处处收敛于 $f(x)$，则 $f(x)$ 是 $E$ 上的可测函数.

**定义 4.1.3** 设 $f(x)$ 是定义在 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的广义实函数，令

$$f^+(x)=\max\{f(x),0\}=\begin{cases} f(x), & f(x)\geq 0; \\ 0, & f(x)<0. \end{cases} \tag{4.1}$$

$$f^-(x)=\max\{-f(x),0\}=\begin{cases} 0, & f(x)\geq 0; \\ -f(x), & f(x)<0. \end{cases} \tag{4.2}$$

它们分别称为函数 $f(x)$ 的**正部**和**负部**，显然有：$f=f^+-f^-$，$|f|=f^++f^-$.

**例 4.1.6** 设 $f(x)$ 是定义在 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的可测函数，则 $f^+(x)$，$f^-(x)$，$|f(x)|$ 皆为可测函数.

**定义 4.1.4** 设 $f(x)$ 是定义在 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的可测函数，若 $f(E)$ 是有限集，则称 $f(x)$ 是 $E$ 上的**可测简单函数**(也简称为简单函数). 记 $f(E)=\{c_1,c_2,\cdots,c_p\}$，$E_k=f^{-1}(c_k)(k=1,2,\cdots,p)$，则

$$E=\bigcup_{k=1}^{p}E_k, E_i\cap E_j=\varnothing(i\neq j),$$

这时有 $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{p}c_k\chi_{E_k}(x)$，称为简单函数的**标准表示式**.

**例 4.1.7** 两个简单函数的和、差、积、商(分母不为零)仍是简单函数(证明留

作练习).

**例 4.1.8** 设简单函数 $f(x)=\sum_{k=1}^{p}c_k\chi_{F_k}(x)$,其中$\{F_k\}$是互不相交的闭集,记 $F=\bigcup_{k=1}^{p}F_k$,则 $f(x)$限制在 $F$ 上是连续函数.

**证** 记 $g=f|F$,对任意闭集 $T\subset\mathbf{R}^1$,则 $g^{-1}(T)=\bigcup\{F_k:c_k\in T\}$为闭集. 因 $g(x)$的定义域为闭集 $F$,由推论 2.5.2 知 $g(x)$是 $F$ 上的连续函数.

**定理 4.1.9** 设 $f(x)$是 $E$ 上的可测函数,则存在可测简单函数列$\{\varphi_k(x)\}$,使得$|\varphi_k(x)|\leqslant|f(x)|(k=1,2,\cdots)$,$\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x)$,并且

(1) 若 $f(x)$是非负可测函数,有 $\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)\leqslant\varphi_3(x)\leqslant\cdots,x\in E$;

(2) 若 $f(x)$是有界可测函数,则上述收敛可以是一致的.

**证** 先设 $f(x)$是 $E$ 上的非负可测函数,对每个自然数 $k$,令

$$\varphi_k(x)=\begin{cases}\dfrac{i-1}{2^k}, & \dfrac{i-1}{2^k}\leqslant f(x)<\dfrac{i}{2^k}(i=1,2,\cdots,k2^k);\\ k, & f(x)\geqslant k.\end{cases}\tag{4.3}$$

因为 $f(x)$为可测,故$\left\{x:\dfrac{i-1}{2^k}\leqslant f(x)<\dfrac{i}{2^k}\right\}$与$\{x:f(x)\geqslant k\}$皆为可测集,所以 $\varphi_k(x)$是非负可测简单函数,且有 $\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)\leqslant\varphi_3(x)\leqslant\cdots,x\in E$ 及 $\varphi_k(x)\leqslant f(x)(k=1,2,\cdots)$.

对 $x\in E$,若 $f(x)<+\infty$,则当 $k$ 充分大时,有$|f(x)-\varphi_k(x)|<\dfrac{1}{2^k}$,故$\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x)$. 若 $f(x)=+\infty$,则对每个 $k$,有 $\varphi_k(x)=k$,故$\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x)$.

再设 $f(x)$是 $E$ 上的一般可测函数,存在非负可测简单函数列$\{g_k(x)\}$与$\{h_k(x)\}$,使得

$$\lim_{k\to\infty}g_k(x)=f^+(x),g_k(x)\leqslant f^+(x)(k=1,2,\cdots);$$

$$\lim_{k\to\infty}h_k(x)=f^-(x),h_k(x)\leqslant f^-(x)(k=1,2,\cdots).$$

令 $\varphi_k(x)=g_k(x)-h_k(x)(k=1,2,\cdots)$,则有

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x),|\varphi_k(x)|\leqslant|f(x)|(k=1,2,\cdots).$$

最后设 $f(x)$是有界可测函数,存在 $M>0$,对任意的 $x\in E$,有$|f(x)|\leqslant M$. 于是当 $k>M$ 时,有$|f^+(x)-g_k(x)|<\dfrac{1}{2^k}$,$|f^-(x)-h_k(x)|<\dfrac{1}{2^k}$,从而有$|f(x)-$

$\varphi_k(x)|<\frac{1}{2^{k-1}}$,所以$\{\varphi_k(x)\}$在$E$上一致收敛于$f(x)$.

**推论 4.1.10** 设$f(x)$是$E$上的可测函数,则存在具有紧支集的可测简单函数列$\{g_k(x)\}$,使得$|g_k(x)|\leqslant|f(x)|(k=1,2,\cdots)$,$\lim\limits_{k\to\infty}g_k(x)=f(x)$.

**证** 由定理4.1.9,知存在可测简单函数列$\{\varphi_k(x)\}$,使得

$$|\varphi_k(x)|\leqslant|f(x)|(k=1,2,\cdots),\lim_{k\to\infty}\varphi_k(x)=f(x).$$

对每个$k$,令$g_k(x)=\varphi_k(x)\chi_{B(0,k)}(x)$,则$\{g_k(x)\}$即为所求.

**定理 4.1.11** 设$f(x)$,$g(x)$是$E$上的可测函数,则它们的和、差、积、商都是$E$上的可测函数(假定运算为几乎处处有意义).

**证** 由定理4.1.9,知存在可测简单函数列$\{f_k(x)\}$,$\{g_k(x)\}$,使$\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$,$\lim\limits_{k\to\infty}g_k(x)=g(x)$.则几乎处处有下述关系:

$$\lim_{k\to\infty}(f_k(x)\pm g_k(x))=f(x)\pm g(x),\lim_{k\to\infty}f_k(x)g_k(x)=f(x)g(x).$$

再由例4.1.7及推论4.1.8得和、差、积的可测性.

在讨论商的可测性时,分母$g(x)$为几乎处处不等于零,令

$$h_k(x)=g_k(x)+\frac{1}{k}\left(\mathrm{sgn}(g_k(x))+\frac{1}{2}\right).$$

则有$h_k(x)\neq 0$,$\lim\limits_{k\to\infty}h_k(x)=g(x)$,且几乎处处有$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{f_k(x)}{h_k(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}$,得商的可测性.

## 4.2 Egoroff(叶果洛夫)定理

先看数学分析中的一个例子.在[0,1]上定义

$$f_k(x)=x^k(k=1,2,\cdots),f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1;\\1, & x=1.\end{cases}$$

则$\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$,但该收敛不是一致收敛.然而对任意的$\delta(0<\delta<1)$,在区间$[0,1-\delta]$上,函数列$\{f_k(x)\}$一致收敛于$f(x)$.下面的叶果洛夫定理将对上述结果进行推广.

**定义 4.2.1** 设$f(x)$,$f_1(x)$,$f_2(x)$,$\cdots$,$f_k(x)$,$\cdots$是$E$上几乎处处有限的可测函数,若对任意的$\delta>0$,存在$E$中可测子集$E_\delta$,$m(E_\delta)<\delta$,使$\{f_k(x)\}$在$E\setminus E_\delta$上一致收敛于$f(x)$,则称函数列$\{f_k(x)\}$在$E$上**近一致收敛**于$f(x)$.

**定理 4.2.1(叶果洛夫定理)** 设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x), \cdots$ 是 $E$ 上几乎处处有限的可测函数,且 $m(E)<\infty$,若函数列 $\{f_k(x)\}$ 在 $E$ 上几乎处处收敛于 $f(x)$,则函数列 $\{f_k(x)\}$ 在 $E$ 上近一致收敛于 $f(x)$.

**证** 不妨假设这些函数在 $E$ 上都是处处有限的.

对任意 $\delta>0$,先构造 $E_\delta$. 记 $\{f_k(x)\}$ 不收敛于 $f(x)$ 的点 $x$ 所组成的集合为 $D$,对每个自然数 $i$,有(参考例 1.6.2)

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\left\{x: |f_k(x)-f(x)| \geqslant \frac{1}{i}\right\}\right) \leqslant m(D)=0. \tag{4.4}$$

记 $E(n,i)=\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}\left\{x: |f_k(x)-f(x)| \geqslant \frac{1}{i}\right\}$,由定理 3.3.8,有 $\lim\limits_{n\to\infty} m(E(n,i))=0$,于是存在 $n_i$,使 $m(E(n_i,i))<\frac{\delta}{2^i}$,令 $E_\delta=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E(n_i,i)$,则

$$m(E_\delta) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(E(n_i,i)) < \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^i}=\delta. \tag{4.5}$$

下面设 $x\in E\setminus E_\delta$. 对任意 $\varepsilon>0$,存在自然数 $i$,使 $1/i<\varepsilon$. 因为 $x\notin E(n_i,i)$,故当 $k\geqslant n_i$ 时,有 $|f_k(x)-f(x)|<\frac{1}{i}<\varepsilon$. 所以函数列 $\{f_k(x)\}$ 在 $E\setminus E_\delta$ 上一致收敛于 $f(x)$.

**注 4.1** 叶果洛夫定理的逆定理也成立,并且不需要"$m(E)<\infty$"这个条件,见例 4.5.7.

下面的例子说明:叶果洛夫定理中的条件"$m(E)<\infty$"不能少.

**例 4.2.2** 在 $\mathbf{R}^1$ 中,设 $E=[0,+\infty)$,令 $f_k(x)=\chi_{[0,k]}(x)\ (k=1,2,\cdots)$ 及 $f(x)=1\ (x\in E)$. 则 $\{f_k(x)\}$ 在 $E$ 上收敛于 $f(x)$,但不是近一致收敛.

**证** 若 $\{f_k(x)\}$ 在 $E$ 上近一致收敛于 $f(x)$,则存在 $E_\delta\subset E$, $m(E_\delta)<1$,使得 $\{f_k(x)\}$ 在 $E\setminus E_\delta$ 上一致收敛于 $f(x)$. 故存在 $k_0$,使当 $k>k_0$ 及 $x\in E\setminus E_\delta$ 时,有 $|f_k(x)-f(x)|<1$. 于是 $E\setminus[0,k]\subset E_\delta$. 但是 $m(E\setminus[0,k])=\infty$,而 $m(E_\delta)<1$,得矛盾.

## 4.3 依测度收敛性

**定义 4.3.1** 设 $f(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x), \cdots$ 是 $E$ 上几乎处处有限的可测函数,若对任意的 $\varepsilon>0$,有

$$\lim_{k\to\infty} m(\{x\in E: |f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\})=0, \tag{4.6}$$

则称函数列$\{f_k(x)\}$在$E$上**依测度收敛**于$f(x)$，记作$f_k \xrightarrow{m} f$.

**例 4.3.1**　若$f_k \xrightarrow{m} f$，$f_k \xrightarrow{m} g$，则$f$与$g$对等.

**证**　设$A \subset E$，$m(E \setminus A)=0$，而函数$f(x)$，$g(x)$，$f_k(x)(k=1,2,\cdots)$在$A$上处处有限. 易见对任意的$\varepsilon>0$，有

$$\{x \in A : |f(x)-g(x)|>\varepsilon\}$$

$$\subset \left\{x \in A : |f(x)-f_k(x)|>\frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x \in A : |f_k(x)-g(x)|>\frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

故

$$m(\{x \in A : |f(x)-g(x)|>\varepsilon\})$$

$$\leqslant m\left(\left\{x \in A : |f(x)-f_k(x)|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)+m\left(\left\{x \in A : |g(x)-f_k(x)|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right).$$

上式对于每个$k$都成立. 令$k \to \infty$，知$m(\{x \in A : |f(x)-g(x)|>\varepsilon\})=0$，故

$$m(\{x \in E : |f(x)-g(x)|>0\}) \leqslant m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\left\{x \in A : |f(x)-g(x)|>\frac{1}{i}\right\}\right)+m(E \setminus A)=0.$$

所以$f$与$g$对等.

**定理 4.3.1**　设$f(x)$，$f_1(x)$，$f_2(x)$，$\cdots$，$f_k(x)$，$\cdots$是$E$上几乎处处有限的可测函数，若函数列$\{f_k(x)\}$在$E$上近一致收敛于$f(x)$，则函数列$\{f_k(x)\}$在$E$上依测度收敛于$f(x)$.

**证**　对任意的$\varepsilon>0$，任意的$\delta>0$，存在$E$中可测子集$E_\delta$，$m(E_\delta)<\delta$，使$\{f_k(x)\}$在$E \setminus E_\delta$上一致收敛于$f(x)$. 于是存在$n$，当$k \geqslant n$时，有$|f_k(x)-f(x)|<\varepsilon(x \in E \setminus E_\delta)$，故$m(\{x \in E : |f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\}) \leqslant m(E_\delta)<\delta$. 所以对任意的$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{k \to \infty} m(\{x \in E : |f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\})=0.$$

即$f_k \xrightarrow{m} f$.

**定理 4.3.2(Lebesgue 定理)**　设$m(E)<\infty$，设$f(x)$，$f_1(x)$，$f_2(x)$，$\cdots$，$f_k(x)$，$\cdots$是$E$上几乎处处有限的可测函数，若函数列$\{f_k(x)\}$在$E$上几乎处处收敛于$f(x)$，则函数列$\{f_k(x)\}$在$E$上依测度收敛于$f(x)$.

**证**　当$m(E)<\infty$时，因$\{f_k(x)\}$在$E$上几乎处处收敛于$f(x)$，由定理 4.2.1 知$\{f_k(x)\}$在$E$上近一致收敛于$f(x)$，再由定理 4.3.1 知$\{f_k(x)\}$在$E$上依测度收敛于$f(x)$.

注意,当 $m(E)=\infty$ 时,定理 4.3.2 的结论不再成立,见例 4.3.3.

**例 4.3.2** 作一依测度收敛但是处处不收敛的函数列.

**解** 对每个 $k$,在 $E=[0,1]$ 上取出 $k$ 个闭区间 $E_i^{(k)}=\left[\frac{i-1}{k},\frac{i}{k}\right](i=1,2,\cdots,k)$,令 $g_i^{(k)}(x)=\chi_{E_i^{(k)}}(x)$,把 $\{g_i^{(k)}\}$ 先按 $k$ 后按 $i$ 顺序排列:

$$g_1^{(1)},g_1^{(2)},g_2^{(2)},g_1^{(3)},g_2^{(3)},g_3^{(3)},\cdots,g_i^{(k)},\cdots$$

把这列函数重新改记为:$f_1,f_2,f_3,\cdots,f_n,\cdots$,并令 $f(x)=0(0\leqslant x\leqslant 1)$.

先证 $f_n\xrightarrow{m}f$. 对任意的 $\varepsilon>0$,设 $f_n=g_i^{(k)}$,则

$$m(\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\})\leqslant m(E_i^{(k)})=\frac{1}{k}.$$

而当 $n\to\infty$ 时,有 $k\to\infty$,所以有 $f_n\xrightarrow{m}f$.

再证 $\{f_n(x)\}$ 为处处不收敛于 $f(x)$. 设 $x\in[0,1]$,对任意的 $k$,存在 $i$ 使得 $g_i^{(k)}(x)=1$. 于是对任意的 $n_0$,存在 $n\geqslant n_0$ 使得 $f_n(x)=1$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x)$ 不成立.

**例 4.3.3** 当 $m(E)=\infty$ 时,作一几乎处处收敛但不是依测度收敛的函数列.

**解** 在 $\mathbf{R}^1$ 中,设 $E=[0,+\infty)$,令 $f_k(x)=\chi_{[0,k]}(x)(k=1,2,\cdots)$ 及 $f(x)=1$ $(x\in E)$. 则 $\{f_k(x)\}$ 在 $E$ 上收敛于 $f(x)$,但不是依测度收敛于 $f(x)$.

事实上,取 $\varepsilon=1/2$ 时,对任意的 $k$,有 $m(\{x:|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\})=m([k,+\infty))=\infty$,所以 $\{f_k(x)\}$ 在 $E$ 上不是依测度收敛于 $f(x)$.

**定理 4.3.3(Riesz 定理)** 设函数列 $\{f_k(x)\}$ 在 $E$ 上依测度收敛于 $f(x)$,则存在子列 $\{f_{k_i}(x)\}$,使 $\{f_{k_i}(x)\}$ 在 $E$ 上几乎处处收敛于 $f(x)$.

**证** 因 $f_k\xrightarrow{m}f$,故对每个自然数 $i$,存在 $k_i$ 使 $m\left(\left\{x:|f_{k_i}(x)-f(x)|>\frac{1}{i}\right\}\right)<\frac{1}{2^i}$,且不妨设 $k_1<k_2<k_3<\cdots$,记 $E_i=\left\{x:|f_{k_i}(x)-f(x)|>\frac{1}{i}\right\}$,令 $D=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{i=n}^{\infty}E_i$,则

$$m(D)=\lim_{n\to\infty}m\Big(\bigcup_{i=n}^{\infty}E_i\Big)\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{\infty}m(E_i)\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{\infty}\frac{1}{2^i}=0. \tag{4.7}$$

设 $x\in E\backslash D$,则存在自然数 $n$,使 $x\notin\bigcup\limits_{i=n}^{\infty}E_i$,于是当 $i\geqslant n$ 时,有 $|f_{k_i}(x)-f(x)|$

$\leqslant 1/i$，故有$\lim\limits_{i\to\infty} f_{k_i}(x)=f(x)$. 所以$\{f_{k_i}(x)\}$在 $E$ 上几乎处处收敛于 $f(x)$.

## 4.4　Lusin(鲁津)定理

**定理 4.4.1(Lusin 定理)**　设 $f(x)$为 $E$ 上几乎处处有限的可测函数，则对任意 $\delta>0$，存在 $E$ 中闭集 $F$，$m(E\setminus F)<\delta$，使得 $f(x)$是 $F$ 上的连续函数.

**证**　因为 $m(\{x:|f(x)|=+\infty\})=0$，下面不妨设 $f(x)$是处处有限的.

第一步，先设 $f(x)$为可测简单函数：$f(x)=\sum\limits_{i=1}^{p}c_i\chi_{E_i}(x)$，这里 $E=\bigcup\limits_{i=1}^{p}E_i$，其中$\{E_i\}$为互不相交的可测集. 对任意 $\delta>0$，对每个 $i$，存在闭集 $F_i\subset E_i$，使 $m(E_i\setminus F_i)<\dfrac{\delta}{p}$. 令 $F=\bigcup\limits_{i=1}^{p}F_i$，则闭集 $F\subset E$，且

$$m(E\setminus F)=m\Big(\Big(\bigcup_{i=1}^{p}E_i\Big)\setminus\Big(\bigcup_{i=1}^{p}F_i\Big)\Big)\leqslant m\Big(\bigcup_{i=1}^{p}(E_i\setminus F_i)\Big)\leqslant\sum_{i=1}^{p}m(E_i\setminus F_i)<\delta.$$

函数 $f(x)$限制在 $F$ 上为 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{p}c_i\chi_{F_i}(x)$，由例 4.1.8 知 $f(x)$是 $F$ 上的连续函数.

第二步，设 $f(x)$为有界可测函数. 由定理 4.1.9，知存在可测简单函数列$\{\varphi_k(x)\}$一致收敛于 $f(x)$. 对任意 $\delta>0$，对每个 $k$，存在 $E$ 中闭集 $F_k$，$m(E\setminus F_k)<\dfrac{\delta}{2^k}$，使得 $\varphi_k(x)$是 $F_k$ 上的连续函数. 令 $F=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}F_k$，则闭集 $F\subset E$，且有

$$m(E\setminus F)=m\Big(E\setminus\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k\Big)\Big)=m\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}(E\setminus F_k)\Big)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m(E\setminus F_k)<\delta.$$

因为每个 $\varphi_k(x)$在 $F$ 上连续，且$\{\varphi_k(x)\}$一致收敛于 $f(x)$，可知 $f(x)$是 $F$ 上的连续函数.

第三步，设 $f(x)$为处处有限的可测函数. 令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{1+|f(x)|}$，则 $g(x)$是有界可测函数，对任意 $\delta>0$，存在 $E$ 中闭集 $F$，$m(E\setminus F)<\delta$，使得 $g(x)$是 $F$ 上的连续函数. 再由 $f(x)=\dfrac{g(x)}{1-|g(x)|}$，知 $f(x)$是 $F$ 上的连续函数.

**定理 4.4.2**　设 $f(x)$为 $E$ 上几乎处处有限的可测函数，则对任意 $\delta>0$，存在 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数 $g(x)$，使得 $m(\{x\in E:f(x)\neq g(x)\})<\delta$，且

(1) 若$|f(x)|\leqslant M(x\in E)$，可使$|g(x)|\leqslant M(x\in\mathbf{R}^n)$；

(2) 若 $f(x)$具有紧支集，可使 $g(x)$具有紧支集.

**证** 对任意$\delta>0$,由定理4.4.1(即鲁津定理),知存在$E$中闭集$F$,$m(E\setminus F)<\delta$,使得$f(x)$是$F$上的连续函数.再由定理2.6.7(即连续延拓定理),知存在$\mathbf{R}^n$上的一个连续函数$g(x)$,满足$g(x)=f(x)(x\in F)$,则有$m(\{x\in E\mid f(x)\neq g(x)\})\leqslant m(E\setminus F)<\delta$.

若$|f(x)|\leqslant M(x\in E)$,由连续延拓定理可知$|g(x)|\leqslant M(x\in\mathbf{R}^n)$.

若$f(x)$具有紧支集,先取$\mathbf{R}^n$上的连续函数$h(x)$,使得$m(\{x\in E\mid f(x)\neq h(x)\})<\frac{\delta}{2}$.设$\operatorname{supp}(f)\subset\overline{B(0,t)}$,取$s>t$使$m(B(0,s)\setminus\overline{B(0,t)})<\frac{\delta}{2}$,则$\overline{B(0,t)}$与$\mathbf{R}^n\setminus B(0,s)$为两个互不相交的闭集,根据定理2.6.5,知存在$\mathbf{R}^n$上的连续函数$\varphi(x)$,使得$0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1(x\in\mathbf{R}^n)$,且

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\in\overline{B(0,t)};\\ 0, & x\in\mathbf{R}^n\setminus B(0,s).\end{cases}$$

再令$g(x)=h(x)\varphi(x)$,则$g(x)$是$\mathbf{R}^n$上具有紧支集的连续函数,且有

$$\begin{aligned}&m(\{x\in E\mid f(x)\neq g(x)\})\\ &\leqslant m\Big(\{x\in E\cap\overline{B(0,t)}\mid f(x)\neq g(x)\}\Big)+m(B(0,s)\setminus\overline{B(0,t)})\\ &\leqslant m(\{x\in E\mid f(x)\neq h(x)\})+\frac{\delta}{2}<\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta.\end{aligned}$$

**推论 4.4.3** 设$f(x)$为$E$上几乎处处有限的可测函数,则存在$\mathbf{R}^n$中的连续函数列$\{g_k(x)\}$在$E$上几乎处处收敛于$f(x)$.

**证** 对每个自然数$k$,由推论4.4.2,知存在$\mathbf{R}^n$上的连续函数$g_k(x)$,使得$m(\{x\in E\mid f(x)\neq g_k(x)\}<\frac{1}{k}$.于是对任意的$\varepsilon>0$,有

$$m(\{x\in E:|f(x)-g_k(x)|>\varepsilon\})\leqslant m(\{x\in E\mid f(x)\neq g_k(x)\})<\frac{1}{k}.$$

故有$\lim\limits_{k\to\infty}m(\{x\in E:|f(x)-g_k(x)|>\varepsilon\})=0$,即$g_k\xrightarrow{m}f$.再由定理4.2.4,知存在子列$\{g_{k_i}(x)\}$,使$\{g_{k_i}(x)\}$在$E$上几乎处处收敛于$f(x)$.

**注 4.2** 鲁津定理的逆定理也成立(见下面的例4.5.8),并由此可得函数可测性的等价刻画.

**命题 4.4.4** 设$f(x)$是可测集$E\subset\mathbf{R}^n$上几乎处处有限的函数,则下列条件等价:

(1) $f(x)$是 $E$ 上的可测函数;

(2) 对任意 $\delta>0$,存在 $E$ 中闭集 $F$,$m(E\setminus F)<\delta$,使得 $f(x)$是 $F$ 上的连续函数;

(3) 存在 $\mathbf{R}^n$ 中的连续函数列$\{g_k(x)\}$在 $E$ 上几乎处处收敛于 $f(x)$.

## 4.5 例题选讲

**例 4.5.1** 设 $f(x)$是可测集 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的函数,若对任意的 $r\in\mathbf{Q}$,$\{x\in E:f(x)>r\}$是可测集,则 $f(x)$是 $E$ 上的可测函数.

**证** 对任意的 $t\in\mathbf{R}^1$,在 $\mathbf{Q}\cap[t,+\infty)$中取点列$\{r_k\}$,使得$\lim\limits_{k\to\infty}r_k=t$,则可知$\{x:f(x)>t\}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{x:f(x)>r_k\}$是可测集,所以 $f(x)$是 $E$ 上的可测函数.

**例 4.5.2** 设 $f(x)$是定义在可测集 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的广义实值函数,若对任意的实数 $t$,$\{x:f(x)=t\}$是可测集,则 $f(x)$是 $E$ 上的可测函数吗?

**解** 不一定. 例如,在 $\mathbf{R}^1$ 中取一个不可测集 $E$,令 $f(x)=\begin{cases}x, & x\in E;\\ -x, & x\in\mathbf{R}^1\setminus E.\end{cases}$

**例 4.5.3** 设 $f(x)$是 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上几乎处处有限的可测函数,$m(E)<\infty$. 试证明:对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $E$ 上的有界可测函数 $g(x)$,使 $m(\{x\in E:f(x)\neq g(x)\})<\varepsilon$.

**证** 对每个 $k$,令 $E_k=\{x\in E:|f(x)|>k\}$,则$\{E_k\}$为递减可测集列,且

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k=\{x\in E:|f(x)|=+\infty\}.$$

因 $m(E_1)\leqslant m(E)<\infty$,由定理 3.3.8,有

$$\lim_{k\to\infty}m(E_k)=m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\right)=m(\{x\in E:|f(x)|=+\infty\})=0.$$

对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $k_0$ 使 $m(E_{k_0})<\varepsilon$,令

$$g(x)=\begin{cases}f(x), & x\in E\setminus E_{k_0};\\ 0, & x\in E_{k_0}.\end{cases}$$

则 $g(x)$是 $E$ 上的有界可测函数,且 $m(\{x\in E:f(x)\neq g(x)\})\leqslant m(E_{k_0})<\varepsilon$.

**例 4.5.4** 设 $f(x)$是 $\mathbf{R}^1$ 上的连续函数,$g(x)$是 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的实值可测函数,则复合函数 $h(x)=f(g(x))$是 $E$ 上的可测函数.

**证** 对任意的开集 $G\subset\mathbf{R}^1$，由 $f(x)$的连续性知 $f^{-1}(G)$是开集，再由 $g(x)$的可测性知 $h^{-1}(G)=g^{-1}(f^{-1}(G))$是可测集，所以 $h(x)=f(g(x))$是 $E$ 上的可测函数.

**例 4.5.5** 设 $f(x),g(x)$是 $\mathbf{R}^1$ 上的实值可测函数，且 $f(x)>0$，证明：$h(x)=f(x)^{g(x)}$是 $\mathbf{R}^1$ 上的可测函数.

**证** 由上例知 $\ln f(x)$是可测函数，从而得 $\ln h(x)=g(x)\ln f(x)$是可测函数. 再由上例知 $h(x)=e^{\ln h(x)}$是可测函数.

**例 4.5.6** 设 $z=f(x,y)$是 $\mathbf{R}^2$ 上的连续函数，$g(x),h(x)$是$[a,b]\subset\mathbf{R}^1$ 上的实值可测函数. 试证明：$F(x)=f(g(x),h(x))$是$[a,b]$上的可测函数.

**证** 对任意的开集 $V\subset\mathbf{R}^1$，由 $f(x,y)$的连续性知 $f^{-1}(V)$是 $\mathbf{R}^1$ 中的开集. 再由开集的构造定理，设 $f^{-1}(V)=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(I_k\times J_k)$，这里，每个 $I_k,J_k$ 为 $\mathbf{R}^1$ 中的半开区间. 则

$$\begin{aligned}F^{-1}(V)&=\{x\in[a,b]:f(g(x),h(x))\in V\}\\&=\{x\in[a,b]:(g(x),h(x))\in f^{-1}(V)\}\\&=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x\in[a,b]:(g(x),h(x))\in I_k\times J_k\}\\&=\bigcup_{k=1}^{\infty}(g^{-1}(I_k)\cap h^{-1}(J_k)).\end{aligned}$$

为可测集，所以 $F(x)=f(g(x),h(x))$是$[a,b]$上的可测函数.

**例 4.5.7(叶果洛夫定理的逆定理)** 设 $f(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x),\cdots$是 $E$ 上几乎处处有限的可测函数，若函数列$\{f_k(x)\}$在 $E$ 上近一致收敛于 $f(x)$，则函数列$\{f_k(x)\}$在 $E$ 上几乎处处收敛于 $f(x)$.

**证** 对每个 $i$，存在 $E$ 中可测子集 $E_i$，$m(E_i)<1/i$，使$\{f_k(x)\}$在 $E\backslash E_i$ 上一致收敛于 $f(x)$. 令 $E_0=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}E_i$，则对任意的 $i$，有 $m(E_0)\leqslant m(E_i)<1/i$，故必 $m(E_0)=0$.

而在 $E\backslash E_0=E\backslash(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}E_i)=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(E\backslash E_i)$上，函数列$\{f_k(x)\}$收敛于 $f(x)$. 所以函数列$\{f_k(x)\}$在 $E$ 上几乎处处收敛于 $f(x)$.

**例 4.5.8(鲁津定理的逆定理)** 设 $f(x)$为可测集 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的函数，若对任意 $\delta>0$，存在 $E$ 中闭集 $F$，$m(E\backslash F)<\delta$，使得 $f(x)$是 $F$ 上的连续函数. 证明：$f(x)$是 $E$ 上的可测函数.

**证** 对每个 $k$，存在 $E$ 中闭集 $F_k$，$m(E\backslash F_k)<1/k$，使得 $f(x)$是 $F_k$ 上的连续

函数，由推论 4.1.5 知 $f(x)$ 是 $F_k$ 上的可测函数，所以 $f(x)$ 是 $F=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k$ 上的可测函数.

对每个 $k$，有 $m(E\setminus F)\leqslant m(E\setminus F_k)<1/k$，故必有 $m(E\setminus F)=0$，所以 $f(x)$ 是 $E$ 上的可测函数.

**例 4.5.9**　设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的函数，若对任意的闭区间 $I\subset(a,b)$，$f(x)$ 在 $I$ 上可测，则 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数.

**证**　取自然数 $n$ 使 $\frac{1}{n}<\frac{b-a}{2}$，令 $I_k=\left[a+\frac{1}{k},b-\frac{1}{k}\right](k=n,n+1,n+2,\cdots)$.

因 $f(x)$ 在每个 $I_k$ 上可测，故 $f(x)$ 在 $(a,b)=\bigcup_{k=n}^{\infty}I_k$ 上可测，所以 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数.

**例 4.5.10**　设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可微函数，则 $f'(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数.

**证**　当 $x>b$ 时补充定义 $f(x)=f(b)$. 对每个 $k$，令 $g_k(x)=k\left[f\left(x+\frac{1}{k}\right)-f(x)\right]$，则在 $[a,b)$ 上有 $\lim_{k\to\infty}g_k(x)=f'(x)$，且每个 $g_k(x)$ 在 $[a,b)$ 上为连续函数，从而也是可测函数，故 $f'(x)$ 是 $[a,b)$ 上的可测函数，所以 $f'(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数.

**例 4.5.11**　设 $f(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x),\cdots$ 是 $E$ 上几乎处处有限的可测函数，且 $m(E)<\infty$. 若在 $\{f_k(x)\}$ 的任一子列 $\{f_{k_i}(x)\}$ 中存在几乎处处收敛于 $f(x)$ 的子列. 试证明：$f_k\xrightarrow{m}f$.

**证**　若 $f_k\xrightarrow{m}f$ 不成立，则存在 $\varepsilon>0$，存在自然数列 $\{k_i\}$，使

$$\lim_{i\to\infty}m(\{x:|f_{k_i}(x)-f(x)|>\varepsilon\})=c>0.$$

由题设在自然数列 $\{k_i\}$ 中取出子列 $\{n_j\}$，使 $f_{n_j}(x)\xrightarrow{a.e.}f(x)$. 再由 Lebesgue 定理，有 $f_{n_j}\xrightarrow{m}f$，此与 $\lim_{i\to\infty}m(\{x:|f_{k_i}(x)-f(x)|>\varepsilon\})>0$ 相矛盾. 所以有 $f_k\xrightarrow{m}f$.

**例 4.5.12**　设 $m(E)<\infty$，在 $E$ 上有 $f_k\xrightarrow{m}f$，且 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上的连续函数，令 $h(x)=g(f(x))$，$h_k(x)=g(f_k(x))(k=1,2,\cdots)$. 试证明：$h_k\xrightarrow{m}h$.

**证**　设 $\{h_{k_i}\}$ 是 $\{h_k\}$ 的任一子列.

由 $f_{k_i}\xrightarrow{m}f$ 及 Riesz 定理,在自然数列 $\{k_i\}$ 中取出子列 $\{n_j\}$,使 $f_{n_j}(x)\xrightarrow{a.e.}f(x)$. 再由 $g(x)$ 的连续性,知 $h_{n_j}(x)\xrightarrow{a.e.}h(x)$. 再由例 4.5.11,知 $h_k\xrightarrow{m}h$.

**例 4.5.13** 设 $m(E)<\infty$,若在 $E$ 上有 $f_k\xrightarrow{m}f$, $g_k\xrightarrow{m}g$,则 $f_kg_k\xrightarrow{m}fg$.

**证** 设 $\{f_{k_i}g_{k_i}\}$ 是 $\{f_kg_k\}$ 的任一子列.

由 $f_{k_i}\xrightarrow{m}f$ 及 Riesz 定理,在自然数列 $\{k_i\}$ 中取出子列 $\{n_j\}$,使 $f_{n_j}(x)\xrightarrow{a.e.}f(x)$. 再由 $g_{n_j}\xrightarrow{m}g$ 及 Riesz 定理,在自然数列 $\{n_j\}$ 中取出子列 $\{m_s\}$,使 $g_{m_s}(x)\xrightarrow{a.e.}g(x)$. 所以在 $\{f_{k_i}g_{k_i}\}$ 中可取出子列 $\{f_{m_s}g_{m_s}\}$,使 $f_{m_s}(x)g_{m_s}(x)\xrightarrow{a.e.}f(x)g(x)$.

由例 4.5.11,有 $f_kg_k\xrightarrow{m}fg$.

**例 4.5.14** 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上几乎处处有限的可测函数,令 $g(t)=m(\{x:|f(x)|\geqslant t\})$,则 $g(t)$ 是 $[0,+\infty)$ 上左连续的递减函数.

**证** 设 $t_0\in[0,+\infty)$,任取递增点列 $\{t_k\}$ 使 $t_k\to t_0$,记

$$E_k=\{x:|f(x)|>t_k\}(k=1,2,\cdots),$$

则 $\{E_k\}$ 为递减集列,且有 $\{x:|f(x)|\geqslant t\}=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_k$ 及 $m(E_1)<\infty$. 故

$$\lim_{k\to\infty}g(t_k)=\lim_{k\to\infty}m(E_k)=m(\{x:|f(x)|>t\})=g(t).$$

所以 $g(t)$ 在点 $t_0$ 为左连续,而 $g(t)$ 为递减函数是显然的.

**例 4.5.15** 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上几乎处处有限的可测函数,证明:对任意的 $c(0<c<1)$,存在唯一的 $t_0\in\mathbf{R}^1$,使得 $m(\{x:f(x)\geqslant t_0\})\geqslant c$, $m(\{x:f(x)\geqslant t\})<c$, $\forall t>t_0$.

**证** 令 $g(t)=m(\{x:f(x)\geqslant t\})$,仿上例证明知 $g(t)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上左连续的递减函数.

易知 $\lim\limits_{t\to-\infty}g(t)=1$, $\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=0$,令 $t_0=\sup\{t:g(t)\geqslant c\}$. 由 $g(t)$ 为左连续,知 $g(t_0)\geqslant c$. 由上确界的定义,对任意的 $t>t_0$,有 $g(t)<c$.

**例 4.5.16** 设 $\{E_k\}$ 是可测集列,$E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$,$m(E)<\infty$. 若对每个 $k$,$\{f_i(x)\}$ 在每个 $E_k$ 上依测度收敛于 $f(x)$,证明:$\{f_i(x)\}$ 在 $E$ 上依测度收敛于 $f(x)$.

**证** 令 $H_n=\bigcup\limits_{k=1}^{n}E_k(n=1,2,3,\cdots)$,则 $\{H_n\}$ 是递增可测集列,且有

$$\lim_{n\to\infty} m(H_n)=m(E)<\infty.$$

对 $\forall\varepsilon>0,\forall\delta>0$，存在 $n$，使得 $m(E\setminus H_n)<\frac{\delta}{2}$. 对每个 $k(1\leqslant k\leqslant n)$，存在 $i_k$，使当 $i\geqslant i_k$ 时，有 $m(\{x\in E_k:|f_i(x)-f(x)|>\varepsilon\})<\frac{\delta}{2n}$.

令 $i_0=\max\{i_k:k=1,2,\cdots,n\}$，于是当 $i\geqslant i_{k_0}$ 时，有

$$\begin{aligned}m(\{x\in E:|f_i(x)-f(x)|>\varepsilon\})&\leqslant m(\{x\in H_n:|f_i(x)-f(x)|>\varepsilon\})+m(E\setminus H_n)\\&\leqslant\sum_{k=1}^{n}m(\{x\in E_k:|f_i(x)-f(x)|>\varepsilon\})+\frac{\delta}{2}<\delta\end{aligned}$$

所以 $\{f_i(x)\}$ 在 $E$ 上依测度收敛于 $f(x)$.

# 习 题 四

1. 设 $f(x)$ 定义在可测集 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上. 若 $f^2(x)$ 在 $E$ 上可测，且 $\{x\in E: f(x)>0\}$ 是可测集，则 $f(x)$ 在 $E$ 上可测.

2. 设 $f(x)$ 定义在可测集 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上. 若对任意的 $\varepsilon>0$，存在可测函数 $g(x)$ 与 $h(x)$，使得 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，$h(x)-g(x)<\varepsilon$，$a.e.$ 于 $E$. 证明：$f(x)$ 在 $E$ 上可测.

3. 设 $\{f_k(x)\}$ 是 $E$ 上的可测函数列，则 $\{f_k(x)\}$ 在 $E$ 上的收敛点集是可测集.

4. 设 $f(x)$ 是 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的可测函数，$H$ 和 $K$ 分别为 $\mathbf{R}$ 中的 $G_\delta$ 和 $F_\sigma$ 集，则 $f^{-1}(H)$ 和 $f^{-1}(K)$ 皆为可测集.

5. 设 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的函数，$\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是开集族，$G=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}G_\lambda$. 若对每个 $\lambda\in\Lambda$，$f(x)$ 是 $G_\lambda$ 上的可测函数，则 $f(x)$ 是 $G$ 上的可测函数.

6. 设 $\{f_\lambda(x)\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个可测函数族，则函数 $g(x)=\sup\limits_{\lambda\in\Lambda}\{f_\lambda(x)\}$ 与 $h(x)=\inf\limits_{\lambda\in\Lambda}\{f_\lambda(x)\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的可测函数吗？

7. 设 $\{f_\lambda(x)\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个连续函数族，则函数 $g(x)=\sup\limits_{\lambda\in\Lambda}\{f_\lambda(x)\}$ 与 $h(x)=\inf\limits_{\lambda\in\Lambda}\{f_\lambda(x)\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的可测函数.

8. 设 $f(x)$ 是 $E$ 上的函数，若 $f(x)$ 是 $E\cap E'$ 上的可测函数，则是 $E$ 上的可测函数.

9. 设 $f(x),f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x),\cdots$ 是 $E$ 上几乎处处有限的可测函数，且 $m(E)<\infty$，若函数列 $\{f_k(x)\}$ 在 $E$ 上几乎处处收敛于 $f(x)$，试证明：存在 $E_k\subset E$ $(k=1,2,\cdots)$，使得 $m(E\setminus(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k))=0$，而 $\{f_k(x)\}$ 在 $E_k$ 上一致收敛于 $f(x)$.

10. 设在 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上 $f_k\xrightarrow{m}f$ 且 $f\sim g$，则 $f_k\xrightarrow{m}g$.

11. 设在 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上 $f_k\xrightarrow{m}f$ 且 $f_k\sim g_k(k=1,2,\cdots)$，则 $g_k\xrightarrow{m}f$.

12. 设在 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上，$f_k(x)\xrightarrow{a.e.}f(x)$，$f_k\xrightarrow{m}g$，证明：$f(x)$ 与 $g(x)$ 对等.

13. 设在 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上，$f_k\xrightarrow{m}f$，$g_k\xrightarrow{m}g$，则 $(f_k+g_k)\xrightarrow{m}(f+g)$.

14. 设在 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上，$f_k\xrightarrow{m}f$，且当 $x\in E$ 时，有 $f_k(x)\leqslant f_{k+1}(x)(k=1,2,\cdots)$. 证明：$f_k(x)\xrightarrow{a.e.}f(x)$.

15. 设在 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上，$f_k\xrightarrow{m}f$，且当 $x\in E$ 时，有 $f_k(x)\geqslant g(x)(k=1,2,\cdots)$. 证明：$f(x)\geqslant g(x)$，$a.e.$ 于 $E$.

16. 设 $\{E_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的可测集列，$f(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的可测函数，若 $\chi_{E_k}\xrightarrow{m}f$，证明：存在可测集 $E$，使得 $f(x)=\chi_E(x)$，$a.e.$ 于 $\mathbf{R}^n$.

17. 试作 $[0,1]$ 上的可测函数 $f(x)$，使对任意的连续函数 $g(x)$，有 $m(\{x\in[0,1]:f(x)\neq g(x)\})>0$.

18. 设在 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上有 $f_k\xrightarrow{m}f$，若对任意的 $\delta>0$，存在 $E_\delta\subset E$，$m(E_\delta)<\delta$，使当 $x\in E\setminus E_\delta$ 时，有 $f_k(x)\leqslant f_{k+1}(x)(k=1,2,\cdots)$. 证明：$f_k(x)\xrightarrow{a.e.}f(x)$.

19. 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^1$ 上的严格单调函数，$g(x)$ 是 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的实值可测函数，则复合函数 $h(x)=f(g(x))$ 是 $E$ 上的可测函数.

20. 设 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上有 $f_k\xrightarrow{m}f$，$g_k\xrightarrow{m}g$，试证明：$\min\{f_k,g_k\}\xrightarrow{m}\min\{f,g\}$，$\max\{f_k,g_k\}\xrightarrow{m}\max\{f,g\}$.

21. 设 $m(E)<\infty$，$f_k\xrightarrow{m}f$. 若 $p>0$，试证明：$f_k^p\xrightarrow{m}f^p$.

22. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是在 $(0,1)$ 上单调递减左连续的可测函数，若对任意的实数 $t$，有 $m(\{x:f(x)\geqslant t\})=m(\{x:g(x)\geqslant t\})$. 试证明：$f(x)=g(x)(0<x<1)$.

# 5 Lebesgue 积分

现在进入本书的中心内容：Lebesgue 积分论.

在数学分析中学习的 Riemann 积分存在很大的缺陷，例如可积函数类受到限制，不连续点不能"太多". 又如积分运算与极限运算可交换的条件太严格，在应用时就不太方便. 从而有不少数学家进行了改造 Riemann 积分的工作，其中法国数学家 Lebesgue 建立的积分理论最为成功，被公认为现代分析中最合适的积分工具.

建立 Lebesgue 积分理论有各种不同的等价方法，本书采用先定义非负可测简单函数的积分，再导出非负可测函数的积分，最后定义一般可测函数的积分.

## 5.1 非负可测简单函数的积分

**定义 5.1.1** 设 $f(x)$是 $E$ 上的非负可测简单函数：$f(x)=\sum_{k=1}^{p}c_k\chi_{E_k}(x)$，其中 $E=\bigcup_{k=1}^{p}E_k$，这里$\{E_k\}$是互不相交的可测集. 定义 $f(x)$在 $E$ 上的 Lebesgue 积分为：

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{p}c_k m(E_k)\,. \tag{5.1}$$

**例 5.1.1** 记 Dirichlet 函数为 $D(x)=\chi_{\mathbf{Q}}(x)$，这里 $\mathbf{Q}$ 为 $\mathbf{R}^1$ 中的有理数集，$\chi_{\mathbf{Q}}$ 为 $\mathbf{Q}$ 的特征函数，则

$$\int_{[0,1]}D(x)\mathrm{d}x=1\cdot m([0,1]\cap\mathbf{Q})+0\cdot m([0,1]\setminus\mathbf{Q})=1\cdot 0+0\cdot 1=0\,.$$

而在数学分析中，我们知道 $D(x)$在$[0,1]$上的 Riemann 积分并不存在.

**定理 5.1.1(积分的线性性质)** 设 $f(x)$，$g(x)$是 $E$ 上的非负可测简单函数，则有

(1) $\int_E cf(x)\mathrm{d}x=c\int_E f(x)\mathrm{d}x$ ($c$ 为非负常数)；

(2) $\int_E (f(x)+g(x))\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x+\int_E g(x)\mathrm{d}x$.

**证** 设 $f(x)=\sum_{i=1}^{p}a_i\chi_{A_i}(x)$，其中 $E=\bigcup_{i=1}^{p}A_i$，这里$\{A_i\}$是互不相交的可测集.

$g(x)=\sum_{j=1}^{q}b_j\chi_{B_j}(x)$，其中 $E=\bigcup_{j=1}^{q}B_j$，这里$\{B_j\}$是互不相交的可测集.

(1) $\int_E cf(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{p}ca_im(A_i)=c\sum_{i=1}^{p}a_im(A_i)=c\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

(2) $E=\bigcup_{i=1}^{p}\bigcup_{j=1}^{q}(A_i\cap B_j)$，在每个 $A_i\cap B_j$ 上有 $f(x)+g(x)=a_i+b_j$，则

$$\begin{aligned}\int_E(f(x)+g(x))\mathrm{d}x&=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(a_i+b_j)m(A_i\cap B_j)\\&=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}a_im(A_i\cap B_j)+\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p}b_jm(A_i\cap B_j)\\&=\sum_{i=1}^{p}a_im(A_i)+\sum_{j=1}^{q}b_jm(B_j)\\&=\int_E f(x)\mathrm{d}x+\int_E g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

若 $A_i\cap B_j=\varnothing$，当然谈不上 $f+g$ 在空集上的取值，但由于空集必是零测集，故这不影响上述推导过程.

**定理 5.1.2** 设 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$，这里$\{E_k\}$是递增可测集列. 若 $f(x)$是 $E$ 上的非负可测简单函数，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x. \tag{5.2}$$

**证** 设 $f(x)=\sum_{i=1}^{p}a_i\chi_{A_i}(x)$，其中 $E=\bigcup_{i=1}^{p}A_i$，这里$\{A_i\}$是互不相交的可测集，则

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\mathrm{d}x&=\sum_{i=1}^{p}a_im(A_i)=\sum_{i=1}^{p}a_i\lim_{k\to\infty}m(E_k\cap A_i)\\&=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{p}a_im(E_k\cap A_i)=\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

## 5.2 非负可测函数的积分

在本节中，记 $S$ 为可测简单函数类.

**定义 5.2.1** 设 $f(x)$是 $E$ 上的非负可测函数，定义 $f(x)$在 $E$ 上的**积分**为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sup\left\{\int_E h(x)\mathrm{d}x:0\leqslant h\leqslant f,h\in S\right\}. \tag{5.3}$$

若$\int_E f(x)\mathrm{d}x<\infty$，称 $f(x)$在 $E$ 上**可积**.

**例 5.2.1** 若 $f(x)$是零测集 $E$ 上的非负可测函数，则每个非负可测简单函数在零测集 $E$ 上的积分必为 0，如此，由上述定义知$\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$.

**命题 5.2.1** 设 $f(x)$，$g(x)$是 $E$ 上的非负可测函数：

(1) 若 $f(x)\leqslant g(x)$，则$\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E g(x)\mathrm{d}x$；

(2) 若可测集 $A\subset E$，则$\int_A f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\chi_A(x)\mathrm{d}x$；

(3) 若可测集 $A\subset E$，则$\int_A f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

**证** (1) 记 $C=\left\{\int_E h(x)\mathrm{d}x:0\leqslant h\leqslant f,h\in S\right\}$,

$$D=\left\{\int_E h(x)\mathrm{d}x:0\leqslant h\leqslant g,h\in S\right\}.$$

由 $f(x)\leqslant g(x)$，知 $C\subset D$，于是有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sup C\leqslant\sup D=\int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 设 $h\in S$，则

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\chi_A(x)\mathrm{d}x&=\sup\left\{\int_E h(x)\mathrm{d}x:0\leqslant h(x)\leqslant f(x)\chi_A(x),x\in E\right\}\\&=\sup\left\{\int_A h(x)\mathrm{d}x:0\leqslant h(x)\leqslant f(x)\chi_A(x),x\in A\right\}\\&=\sup\left\{\int_A h(x)\mathrm{d}x:0\leqslant h(x)\leqslant f(x),x\in A\right\}\\&=\int_A f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

(3) $\int_A f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\chi_A(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

**例 5.2.2** 设 $f(x)$在 $E$ 上非负可测且$\alpha\leqslant f(x)\leqslant\beta$，则

$$\alpha m(E)\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\beta m(E).$$

**定理 5.2.2(Levi 渐升列积分定理)** 设有定义在 $E$ 上的非负可测函数渐升列：$0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_k(x)\leqslant\cdots$，$\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)(x\in E)$，则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x. \tag{5.4}$$

**证**　由$\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E f_{k+1}(x)\mathrm{d}x(k=1,2,\cdots)$，知$\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x$存在．因为$\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x(k=1,2,\cdots)$，所以有

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

设$h(x)$是$E$上任一非负可测简单函数，且$0\leqslant h(x)\leqslant f(x)(x\in E)$．对任意的$c(0<c<1)$，令$E_k=\{x\in E:f_k(x)\geqslant ch(x)\}(k=1,2,\cdots)$，则可证：

$$E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_k\subset\cdots,E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k.$$

所以由定理 5.1.2 有

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x&\geqslant\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}f_k(x)\mathrm{d}x\geqslant\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}ch(x)\mathrm{d}x\\&=c\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}h(x)\mathrm{d}x=c\int_E h(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由$c$的任意性知$\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_E h(x)\mathrm{d}x$．再由$h(x)$的任意性及$f(x)$的积分定义有

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

**定理 5.2.3(积分的线性性质)**　设$f(x)$，$g(x)$是$E$上的非负可测函数．则

(1) $\int_E cf(x)\mathrm{d}x=c\int_E f(x)\mathrm{d}x$ ($c$为非负常数)；

(2) $\int_E(f(x)+g(x))\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x+\int_E g(x)\mathrm{d}x$.

**证**　(1) 由定理 5.1.1 及定义 5.2.1 即得．

(2) 由定理 4.1.9，知存在$E$上非负可测简单函数渐升列$\{f_k(x)\}$，$\{g_k(x)\}$，使

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x),\lim_{k\to\infty}g_k(x)=g(x)(x\in E).$$

则$\{f_k(x)+g_k(x)\}$仍为$E$上非负可测简单函数渐升列，且

$$\lim_{k\to\infty}(f_k(x)+g_k(x))=f(x)+g(x)(x\in E).$$

所以由简单函数积分的线性性质和 Levi 渐升列积分定理，有

$$\int_E (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_E (f_k(x)+g_k(x))\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x + \lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

**定理 5.2.4(逐项积分定理)** 设$\{f_k(x)\}$是 $E$ 上的非负可测函数列,则

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x. \tag{5.5}$$

**证** 令 $g_m(x)=\sum\limits_{k=1}^{m} f_k(x)(m=1,2,\cdots)$,则$\{g_m(x)\}$是 $E$ 上非负可测函数渐升列:

$$g_1(x)\leqslant g_2(x)\leqslant\cdots\leqslant g_m(x)\leqslant\cdots, \lim_{m\to\infty} g_m(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x).$$

所以由 Levi 渐升列积分定理和积分的线性性质,有

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty}\int_E g_m(x)\mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty}\int_E \sum_{k=1}^{m} f_k(x)\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x.$$

**推论 5.2.5(对积分域的可数可加性)** 设 $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$,这里$\{E_k\}$是互不相交的可测集,设 $f(x)$是 $E$ 上的非负可测函数,则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x. \tag{5.6}$$

**证** $$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{E_k}(x)\mathrm{d}x = \int_E \sum_{k=1}^{\infty} f(x)\chi_{E_k}(x)\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\int_E f(x)\chi_{E_k}(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x.$$

**定理 5.2.6** 设 $f(x)$,$g(x)$是 $E$ 上的非负可测函数,若 $f(x)=g(x)$,*a. e.* 于 $E$,则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

**证** 记 $A=\{x\in E: f(x)=g(x)\}$,$B=E\setminus A$,则 $m(B)=0$,从而得 $f(x)$,$g(x)$ 在 $B$ 上的积分为零. 所以有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_A f(x)\mathrm{d}x + \int_B f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_A g(x)\mathrm{d}x + \int_B g(x)\mathrm{d}x = \int_E g(x)\mathrm{d}x .$$

**命题 5.2.7**　设 $f(x)$是 $E$ 上的非负可测函数,则

(1) $f(x)=0, a.e.$ 于 $E \Leftrightarrow \int_E f(x)\mathrm{d}x = 0$;

(2) 设 $f(x)$是 $E$ 上的非负可积函数,则 $f(x)$在 $E$ 上几乎处处有限.

**证**　(1)($\Rightarrow$):由定理 5.2.6 有 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E 0 \cdot \mathrm{d}x = 0$.

($\Leftarrow$):记 $E_k = \left\{x \in E : f(x) > \frac{1}{k}\right\}(k=1,2,\cdots)$,由

$$\frac{1}{k}m(E_k) = \int_{E_k} \frac{1}{k}\mathrm{d}x \leqslant \int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x = 0 ,$$

知 $m(E_k)=0$. 于是 $m(\{x\in E: f(x)>0\}) = m(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k)=0$.

(2) 记 $A=\{x\in E: f(x)=+\infty\}$,对每个自然数 $k$,有

$$km(A) = \int_A k\,\mathrm{d}x \leqslant \int_A f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x < \infty .$$

由 $k$ 的任意性,必有 $m(A)=0$,即 $f(x)$在 $E$ 上几乎处处有限.

**定理 5.2.8(Fatou 引理)**　设$\{f_k(x)\}$是 $E$ 上的非负可测函数列,则

$$\int_E \varliminf_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x . \tag{5.7}$$

**证**　令 $g_k(x)=\inf_{i\geqslant k}\{f_i(x)\}$,则有:$0\leqslant g_1(x)\leqslant g_2(x)\leqslant\cdots\leqslant g_k(x)\leqslant\cdots$,且 $\varliminf_{k\to\infty} f_k(x) = \sup_{k\geqslant 1}\{\inf_{i\geqslant k}\{f_i(x)\}\} = \lim_{k\to\infty} g_k(x)$. 由定理 5.2.2(即 Levi 渐升列积分定理),有

$$\int_E \varliminf_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E \lim_{k\to\infty} g_k(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x .$$

**注 5.1**　在 Fatou 定理中,严格的不等式有可能出现.

**例 5.2.3**　在 $\mathbf{R}^1$ 中,记 $E=(0,1)$,对每个 $k$,令 $f_k(x)=\begin{cases} k, & 0<x<\frac{1}{k}; \\ 0, & \frac{1}{k}\leqslant x<1. \end{cases}$

则 $\lim_{k\to\infty} f_k(x)=0(x\in E)$,且对每个 $k$,有 $\int_E f_k(x)\mathrm{d}x = 1$. 所以有

$$\int_E \varliminf_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E 0\cdot\mathrm{d}x = 0 < 1 = \varliminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x .$$

## 5.3 一般可测函数的积分

对于一般的可测函数 $f(x)$，有 $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$，所以引进如下定义.

**定义 5.3.1** 设 $f(x)$是 $E$ 上的可测函数，考虑两个函数：$f^+(x)$，$f^-(x)$.

(1) 若上述两个函数中至少有一个为可积，则称 $\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E f^+(x)\mathrm{d}x-\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$ 为 $f(x)$ 在 $E$ 上的**积分**.

(2) 若上述两个函数皆为可积，则称 $f(x)$在 $E$ 上**可积**. 在 $E$ 上可积函数的全体记为 $L(E)$.

**命题 5.3.1** 设 $f(x)$是 $E$ 上的可测函数，则

(1) $\int_E |f(x)|\mathrm{d}x=\int_E f^+(x)\mathrm{d}x+\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$；

(2) $f\in L(E)\Leftrightarrow |f|\in L(E)$；

(3) $\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_E |f(x)|\mathrm{d}x$.

**证** (1) 由 $f(x)=f^+(x)+f^-(x)$，及非负可测函数积分的线性性质，有

$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}x=\int_E f^+(x)\mathrm{d}x+\int_E f^-(x)\mathrm{d}x.$$

(2) $f\in L(E)\Leftrightarrow f^+,f^-\in L(E)\Leftrightarrow |f|\in L(E)$.

(3)
$$\begin{aligned}\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_E f^+(x)\mathrm{d}x-\int_E f^-(x)\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \left|\int_E f^+(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_E f^-(x)\mathrm{d}x\right| \\ &= \int_E f^+(x)\mathrm{d}x+\int_E f^-(x)\mathrm{d}x=\int_E |f(x)|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

**命题 5.3.2** 设 $f(x)$，$g(x)$在 $E$ 上有积分：

(1) 若 $f(x)\leqslant g(x)$，则 $\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E g(x)\mathrm{d}x$；

(2) 若可测集 $A\subset E$，则 $\int_A f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\chi_A(x)\mathrm{d}x$；

(3) 若 $|f(x)|\leqslant g(x)$及 $g\in L(E)$，则 $f\in L(E)$.

**证** (1) 由 $f(x)\leqslant g(x)$，知 $f^+(x)\leqslant g^+(x)$，$f^-(x)\geqslant g^-(x)$，所以有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E f^+(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \int_E g^+(x)\mathrm{d}x - \int_E g^-(x)\mathrm{d}x = \int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 由命题 5.2.1,有

$$\int_A f(x)\mathrm{d}x = \int_A f^+(x)\mathrm{d}x - \int_A f^-(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_E f^+(x)\chi_A(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\chi_A(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_E (f(x)\chi_A(x))^+\mathrm{d}x - \int_E (f(x)\chi_A(x))^-\mathrm{d}x$$
$$= \int_E f(x)\chi_A(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 由命题 5.2.1,知 $|f|\in L(E)$. 再由命题 5.3.1,知 $f\in L(E)$.

**例 5.3.1** 设 $f(x)$ 在 $E$ 上有积分且 $\alpha\leqslant f(x)\leqslant\beta$,则

$$\alpha m(E)\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\beta m(E).$$

**命题 5.3.3** 若 $f(x)$ 是 $E$ 上的可测函数,则

(1) 若 $f(x)=0$, $a.e.$ 于 $E$,有 $\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$;

(2) 若 $f(x)$ 是 $E$ 上的可积函数,则 $f(x)$ 在 $E$ 上几乎处处有限.

**证** (1) 因 $f(x)=0$, $a.e.$ 于 $E$,知 $|f(x)|=0$, $a.e.$ 于 $E$. 再由命题 5.3.2 及命题 5.2.7,推出 $\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_E|f(x)|\mathrm{d}x=0$,所以 $\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$.

(2) 因 $f\in L(E)$,由命题 5.3.1,有 $|f|\in L(E)$. 再由命题 5.2.7,知 $|f(x)|$ 在 $E$ 上几乎处处有限,推出 $f(x)$ 在 $E$ 上几乎处处有限.

**定理 5.3.4** 设 $f(x)=g(x)$, $a.e.$ 于 $E$,若 $f\in L(E)$,则 $g\in L(E)$,且有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

**证** 因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 对等,可知 $f^+(x)$ 与 $g^+(x)$ 对等,以及 $f^-(x)$ 与 $g^-(x)$ 对等. 由 $f\in L(E)$,知 $f^+,f^-\in L(E)$. 再由定理 5.2.6,有 $g^+,g^-\in L(E)$,所以有 $g\in L(E)$,且

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E f^+(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\mathrm{d}x = \int_E g^+(x)\mathrm{d}x - \int_E g^-(x)\mathrm{d}x = \int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

**注 5.2** 两个对等的可测函数,其可积性与积分值是一致的,所以被积函数在

一个零测集上的取值对于是否可积与积分值没有影响. 因而被积函数甚至可以在一个零测集上没有定义.

**定理 5.3.5(积分的线性性质)** 设 $f(x)$, $g(x)$ 是 $E$ 上的可积函数,则有

(1) $\int_E cf(x)\mathrm{d}x = c\int_E f(x)\mathrm{d}x$ ($c$ 为常数);

(2) $\int_E (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x$.

**证** (1) 当 $c \geqslant 0$ 时,因 $(cf)^+ = cf^+$, $(cf)^- = cf^-$,有

$$\begin{aligned}\int_E cf(x)\mathrm{d}x &= \int_E cf^+(x)\mathrm{d}x - \int_E cf^-(x)\mathrm{d}x \\ &= c\left[\int_E f^+(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\mathrm{d}x\right] = c\int_E f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

当 $c<0$ 时,因 $(-f)^+ = f^-$, $(-f)^- = f^+$,有

$$\begin{aligned}\int_E cf(x)\mathrm{d}x &= -c\int_E (-f(x))\mathrm{d}x \\ &= -c\left[\int_E f^-(x)\mathrm{d}x - \int_E f^+(x)\mathrm{d}x\right] = c\int_E f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(2) 由 $f, g \in L(E)$,及 $|f(x)+g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)|$,知 $f+g \in L(E)$,所以函数 $f, g, f+g$ 都是几乎处处有限. 于是有

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^-,$$

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + (f+g)^-, \ a.e. \text{ 于 } E.$$

由定理 5.2.3(即非负可测函数积分的可加性),有

$$\int_E (f+g)^+ \mathrm{d}x + \int_E f^- \mathrm{d}x + \int_E g^- \mathrm{d}x = \int_E f^+ \mathrm{d}x + \int_E g^+ \mathrm{d}x + \int_E (f+g)^- \mathrm{d}x.$$

因为上式中的每项积分皆为有限值,移项后即得

$$\int_E (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

## 5.4 控制收敛定理

**定理 5.4.1(Lebesgue 控制收敛定理)** 设 $f_k \in L(E)$ $(k=1,2,\cdots)$, $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, $a.e.$ 于 $E$. 若存在控制函数 $F \in L(E)$,使 $|f_k(x)| \leqslant F(x)$ $a.e.$ $(k=1,2,\cdots)$,则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x. \tag{5.8}$$

**证** 对每个 $k$，有 $2F(x)-|f(x)-f_k(x)|\geqslant 0$，a.e. 于 $E$，由 Fatou 引理，有

$\int_E \varliminf_{k\to\infty}(2F(x)-|f(x)-f_k(x)|)\mathrm{d}x\leqslant \varliminf_{k\to\infty}\int_E(2F(x)-|f(x)-f_k(x)|)\mathrm{d}x$，

即，$\int_E 2F(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E 2F(x)\mathrm{d}x-\varlimsup_{k\to\infty}\int_E|f(x)-f_k(x)|\mathrm{d}x$. 因为 $F\in L(E)$，故消去 $\int_E 2F(x)\mathrm{d}x$ 后得 $\varlimsup_{k\to\infty}\int_E|f(x)-f_k(x)|\mathrm{d}x\leqslant 0$，所以

$$\lim_{k\to\infty}\int_E|f(x)-f_k(x)|\mathrm{d}x=0.$$

再由 $\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x-\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_E|f(x)-f_k(x)|\mathrm{d}x$，知

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

**定理 5.4.2(有界控制收敛定理)** 设 $\{f_k(x)\}$ 是 $E$ 上的可测函数列，$m(E)<\infty$，$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$，a.e. 于 $E$. 若存在常数 $M$，使：$|f_k(x)|\leqslant M$，a.e. 于 $E(k=1,2,\cdots)$，则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

**证** 在定理 5.4.1 中，取控制函数 $F(x)=M$ 即可.

**定理 5.4.3(逐项积分定理)** 设 $\{f_k(x)\}$ 是 $E$ 上的可积函数列，若 $\sum_{k=1}^{\infty}\int_E|f_k(x)|\mathrm{d}x<\infty$，则

$$\int_E\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x. \tag{5.9}$$

**证** 令 $F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x)|$，由定理 5.2.4 知 $\int_E F(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E|f_k(x)|\mathrm{d}x<\infty$. 所以有 $F\in L(E)$，从而得 $F(x)$ 为几乎处处有限，故级数 $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ 为几乎处处收敛，其和记为 $f(x)$. 再由 $|f(x)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x)|=F(x)$，知 $f\in L(E)$.

再令 $g_m(x)=\sum_{k=1}^{m}f_k(x)(m=1,2,\cdots)$，则 $|g_m(x)|\leqslant\sum_{k=1}^{m}|f_k(x)|\leqslant F(x)(m=1,2,\cdots)$，由控制收敛定理有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E\lim_{m\to\infty}g_m(x)\mathrm{d}x=\lim_{m\to\infty}\int_E g_m(x)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x.$$

**推论 5.4.4(对积分域的可数可加性)** 设 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$,这里$\{E_k\}$是互不相交的可测集.若 $f\in L(E)$,则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x.$$

**证** 由非负可测函数对积分域的可数可加性,有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_E|f(x)\chi_{E_k}(x)|\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_E|f(x)|\mathrm{d}x<\infty.$$

再由逐项积分定理,有

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\mathrm{d}x&=\int_E f(x)\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{E_k}(x)\mathrm{d}x=\int_E\sum_{k=1}^{\infty}f(x)\chi_{E_k}(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E f(x)\chi_{E_k}(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

**推论 5.4.5** 设 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$,$\{E_k\}$是递增可测集列.若 $f(x)$是 $E$ 上的可积函数,则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x.$$

**证** 令 $f_k(x)=f(x)\chi_{E_k}(x)(k=1,2,\cdots)$,则$|f_k(x)|\leqslant|f(x)|$,$f_k(x)\to f(x)(k\to\infty)$,$x\in E$ 而且 $f\in L(E)$.用控制收敛定理即得结论.

**定理 5.4.6(积分的绝对连续性)** 若 $f\in L(E)$,则对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使当可测集 $e\subset E$ 且 $m(e)<\delta$ 时,有

$$\left|\int_e f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_e|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.\tag{5.10}$$

**证** 不妨设 $f(x)\geqslant0$.对任意的 $\varepsilon>0$,由定义 5.2.1 知存在非负可测简单函数 $h(x)$,使 $0\leqslant h(x)\leqslant f(x)$ 及 $\int_E h(x)\mathrm{d}x>\int_E f(x)\mathrm{d}x-\frac{\varepsilon}{2}$.设$|h(x)|\leqslant M$,令 $\delta=\frac{\varepsilon}{2M}$,则当可测集 $e\subset E$ 且 $m(e)<\delta$ 时,有

$$\begin{aligned}\int_e f(x)\mathrm{d}x&=\int_e f(x)\mathrm{d}x-\int_e h(x)\mathrm{d}x+\int_e h(x)\mathrm{d}x\\&=\int_e[f(x)-h(x)]\mathrm{d}x+\int_e h(x)\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_E[f(x)-h(x)]\mathrm{d}x+Mm(e)\end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

## 5.5 可积函数与连续函数

**引理 5.5.1** 若 $f \in L(E)$,则对任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $\mathbf{R}^n$ 上具有紧支集的可测简单函数 $\varphi(x)$,使 $\int_E |f(x) - \varphi(x)| \, dx < \varepsilon$.

**证** 由推论 4.1.10,知存在具有紧支集的可测简单函数列 $\{\varphi_k(x)\}$,使得

$$|\varphi_k(x)| \leqslant |f(x)| (k=1,2,\cdots), \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x).$$

因为 $|f(x) - \varphi_k(x)| \leqslant 2|f(x)| (k=1,2,\cdots)$,由控制收敛定理有

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f(x) - \varphi_k(x)| \, dx = \int_E \lim_{k\to\infty} |f(x) - \varphi_k(x)| \, dx = \int_E 0 \cdot dx = 0 .$$

于是对任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $k$,使 $\int_E |f(x) - \varphi_k(x)| \, dx < \varepsilon$.

**定理 5.5.2** 若 $f \in L(E)$,则对任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $\mathbf{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数 $g(x)$,使 $\int_E |f(x) - g(x)| \, dx < \varepsilon$.

**证** 由引理 5.5.1,知对任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $\mathbf{R}^n$ 上具有紧支集的可测简单函数 $\varphi(x)$,使 $\int_E |f(x) - \varphi(x)| \, dx < \frac{\varepsilon}{2}$. 设 $|\varphi(x)| \leqslant M$,由定理 4.4.2,知存在 $\mathbf{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数 $g(x)$,使 $|g(x)| \leqslant M$,且 $m(\{x \in E : \varphi(x) \neq g(x)\}) < \frac{\varepsilon}{4M}$,则

$$\begin{aligned}\int_E |f(x) - g(x)| \, dx &\leqslant \int_E |f(x) - \varphi(x)| \, dx + \int_E |\varphi(x) - g(x)| \, dx \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \int_{\{x \in E : \varphi(x) \neq g(x)\}} |\varphi(x) - g(x)| \, dx \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2Mm(\{x \in E : \varphi(x) \neq g(x)\}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .\end{aligned}$$

## 5.6 Lebesgue 积分与 Riemann 积分

有时为方便区别,常把 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分简称为 $(R)$ 积分,记为

$(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$；把 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 Lebesgue 积分简称为 $(L)$ 积分，记为 $(L)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

先回顾 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 $(R)$ 积分. 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的有界函数，对 $[a,b]$ 的任一分划 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. 记

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n),\ \|T\|=\max\{x_i-x_{i-1}: i=1,2,\cdots,n\},$$

$$M_i=\sup\{f(x): x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i\},m_i=\inf\{f(x): x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i\}.$$

分别称 $S(f,T)=\sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i$ 与 $s(f,T)=\sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i$ 为 $f(x)$ 关于分划 $T$ 的**大和与小和**，分别称 $\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=\inf\{S(f,T): T\text{ 是}[a,b]\text{的分划}\}$，

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=\sup\{s(f,T): T\text{ 是}[a,b]\text{的分划}\}$$

为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**上积分与下积分**. 若两者相等，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为 $(R)$ **可积**，记为 $f\in\mathbf{R}[a,b]$. 这时积分值为 $(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$.

现在对 $x\in[a,b]$，令 $\omega_k(x)=\sup\left\{|f(x)-f(y)|: y\in[a,b],|x-y|<\frac{1}{k}\right\}$，$\omega(x)=\lim\limits_{k\to\infty}\omega_k(x)$. 则 $\omega(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数，且 $f(x)$ 在点 $x$ 连续当且仅当：$\omega(x)=0$.

**定理 5.6.1** 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的有界函数，则 $f\in R[a,b]$ 的充分必要条件是：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的不连续点集是零测集.

**证** 充分性. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的不连续点集是零测集，则 $\{\omega_k(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处收敛于 0. 对任意的 $\varepsilon>0$，由叶果洛夫定理存在可测集 $F\subset[a,b]$，$m([a,b]\backslash F)<\varepsilon$，使 $\{\omega_k(x)\}$ 在 $F$ 上一致收敛于 0，故存在 $k$ 使 $\omega_k(x)<\varepsilon(x\in F)$.

因 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的有界函数，知存在 $M>0$，使 $|f(x)|\leqslant M(x\in[a,b])$.

设 $T$ 是 $[a,b]$ 的任一分划 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，且 $\|T\|<\frac{1}{k}$. 这里 $\|T\|=\max\{x_i-x_{i-1}: 1\leqslant i\leqslant n\}$. 令

$$A=\{i:[x_{i-1},x_i]\cap F\neq\varnothing\},B=\{i:[x_{i-1},x_i]\subset[a,b]\backslash F\}.$$

当 $i\in A$ 时,取 $x\in[x_{i-1},x_i]\cap F$,有 $M_i-m_i\leqslant|M_i-f(x)|+|m_i-f(x)|\leqslant 2\omega_k(x)<2\varepsilon$,则

$$\begin{aligned}S(f,T)-s(f,T)&=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i\\&=\sum_{i\in A}(M_i-m_i)\Delta x_i+\sum_{i\in B}(M_i-m_i)\Delta x_i\\&\leqslant\sum_{i\in A}2\varepsilon\Delta x_i+\sum_{i\in B}2M\Delta x_i\\&\leqslant 2\varepsilon(b-a)+2Mm([a,b]\backslash F)\\&<2\varepsilon(b-a+M).\end{aligned}$$

所以 $f\in R[a,b]$.

必要性. 设 $f\in R[a,b]$,对 $c>0$,记 $F=\{x\in[a,b]:\omega(x)>c\}$. 若有 $m(F)>0$,对 $[a,b]$ 的任一分划 $T:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,记 $A=\{i:[x_{i-1},x_i]\cap F\neq\varnothing\}$,则有

$$S(f,T)-s(f,T)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i\geqslant\sum_{i\in A}(M_i-m_i)\Delta x_i\geqslant cm(F).$$

与 $f\in R[a,b]$ 矛盾,故必 $m(F)=0$. 从而得 $\{x\in[a,b]:\omega(x)>0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x\in[a,b]:\omega(x)>\frac{1}{n}\right\}$ 是零测集,即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的不连续点集是零测集.

**例 5.6.1** 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数,若其不连续点为至多可数,则 $f\in R[a,b]$.

**例 5.6.2** 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调函数,则 $f\in R[a,b]$.

**定理 5.6.2** 函数 $f(x)$ 的常义 $(R)$ 积分与 $(L)$ 积分有如下关系:

(1) 若 $f(x)$ 为 $(R)$ 可积,则 $f(x)$ 为 $(L)$ 可积,且积分值相等;

(2) 若 $f(x)$ 为 $(L)$ 可积,推不出 $f(x)$ 为 $(R)$ 可积.

**证** (1) 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的常义 $(R)$ 可积函数,由定理 5.6.1,知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的不连续点集是零测集,故 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界可测函数,所以 $f\in L[a,b]$.

对 $[a,b]$ 的任一分划 $T:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,记号 $M_i,m_i,\Delta x_i$ 如前所述,则

$$m_i\Delta x_i\leqslant(L)\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\mathrm{d}x\leqslant M_i\Delta x_i\ (i=1,2,\cdots,n).$$

所以有 $s(f,T)\leqslant(L)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant S(f,T)$,对左端取上确界,对右端取下确界,有

$$\underline{\int}_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant (L)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int}_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

再由 $f\in R[a,b]$，知 $(L)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

(2) 考虑定义在$[0,1]$上的函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\cap\mathbf{Q};\\ 0, & x\in[0,1]\setminus\mathbf{Q}.\end{cases}$ 显然，函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上为$(L)$可积，但不是$(R)$可积的.

**例 5.6.3** 计算 $(L)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，这里 $f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\cap\mathbf{Q};\\ x^2, & x\in[0,1]\setminus\mathbf{Q}.\end{cases}$

**解** $(L)\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = (L)\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = (R)\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$. 这里第一个等号是由于$[0,1]\cap\mathbf{Q}$是零测集，而$(L)$积分与被积函数在零测集上的取值无关.

**定理 5.6.3** 函数 $f(x)$的广义$(R)$积分与$(L)$积分有如下关系：

(1) 若 $f(x)$的广义$(R)$积分是绝对收敛的，则 $f(x)$是$(L)$可积的，且积分值相等；

(2) 若 $f(x)$的广义$(R)$积分是条件收敛的，则 $f(x)$不是$(L)$可积的.

**证** (1) 以绝对收敛的广义$(R)$积分$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 为例，其余类似.

对每个自然数 $k$，$f(x)$在$[0,k]$上为常义$(R)$可积，于是有

$$(L)\int_0^{+\infty} |f|\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}(L)\int_0^k |f|\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}(R)\int_0^k |f|\mathrm{d}x = (R)\int_0^{+\infty} |f|\mathrm{d}x < +\infty,$$

所以 $f\in L[0,\infty)$. 再由推论 5.4.5，有

$$(L)\int_0^{+\infty} f\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}(L)\int_0^k f\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}(R)\int_0^k f\mathrm{d}x = (R)\int_0^{+\infty} f\mathrm{d}x.$$

(2) 以条件收敛的广义$(R)$积分$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 为例，其余类似.

对每个自然数 $k$，$f(x)$在$[0,k]$上为常义$(R)$可积，于是有

$$(L)\int_0^{+\infty} |f|\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}(L)\int_0^k |f|\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}(R)\int_0^k |f|\mathrm{d}x = +\infty,$$

所以 $f\notin L([0,\infty))$.

在理论研究和应用实践中，常要考虑积分与极限的交换问题，积分与求和的交换问题，积分与求导的交换问题等等. 这些问题的解决，在$(R)$积分的理论中往往需要附加比较强的条件，但是在$(L)$积分的理论中所需要的条件就比较宽松. 因此

可以得到(L)积分的理论的一个重要应用.

例如,要研究$(R)\int\lim_{k\to\infty}f_k\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}(R)\int_E f_k\mathrm{d}x$是否成立.若被积函数皆为常义(R)可积或绝对收敛的广义(R)可积,该问题就转化为$(L)\int\lim_{k\to\infty}f_k\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}(L)\int_E f_k\mathrm{d}x$是否成立?而后者常常比较容易判别.

**例 5.6.4** 求 $\lim_{k\to\infty}(R)\int_0^1\frac{k\sqrt{x}}{1+k^2x^2}\sin^5 kx\,\mathrm{d}x$.

**解** 令 $f_k(x)=\frac{k\sqrt{x}}{1+k^2x^2}\sin^5 kx(k=1,2,\cdots)$,则$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=0$.

由$|f_k(x)|\leqslant\left|\frac{k\sqrt{x}}{1+k^2x^2}\right|\leqslant\frac{k\sqrt{x}}{2kx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=F(x)(k=1,2,\cdots)$,及$(R)\int_0^1F(x)\mathrm{d}x$为绝对收敛,故$F\in L[0,1]$,所以由定理 5.6.2 和控制收敛定理,有

$$\lim_{k\to\infty}(R)\int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}(L)\int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x=(L)\int_0^1\lim_{k\to\infty}f_k(x)\mathrm{d}x=0.$$

## 5.7 重积分与累次积分

在 Riemann 积分中,若$f(x,y)$在$D=[a,b]\times[c,d]$上连续,则

$$\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

下面我们希望在 Lebesgue 积分的理论中建立类似的结果.

设$\mathbf{R}^n=\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q(n=p+q)$,$x=(x_1,x_2,\cdots,x_p)\in\mathbf{R}^p$,$y=(y_1,y_2,\cdots,y_q)\in\mathbf{R}^q$,记

$$(x,y)=(x_1,x_2,\cdots,x_p,y_1,y_2,\cdots,y_q)\in\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q=\mathbf{R}^n,$$

则定义在$\mathbf{R}^n$上的函数可以记为$f(x,y)$,其中$(x,y)\in\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$.若$f(x,y)$是$\mathbf{R}^n$上的可测函数且其 Lebesgue 积分有定义,则其积分可以写作$\int_{\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,并称为**重积分**.

现在设$f(x,y)$是$\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$上的非负可测函数.在研究重积分$\int_{\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$与累次积分$\int_{\mathbf{R}^q}\left(\int_{\mathbf{R}^p}f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$是否相等之前,应该先考虑

该累次积分的存在性. 记 $F(x)=\int_{\mathbf{R}^p}f(x,y)\mathrm{d}y$，若要 $\int_{\mathbf{R}^q}F(x)\mathrm{d}x$ 存在，则 $F(x)=\int_{\mathbf{R}^p}f(x,y)\mathrm{d}y$ 必须是 $\mathbf{R}^p$ 上的可测函数. 所以对几乎处处的 $x\in\mathbf{R}^p$，函数 $F(x)=\int_{\mathbf{R}^p}f(x,y)\mathrm{d}y$ 必须有定义，从而得 $f(x,y)$ 是 $y\in\mathbf{R}^q$ 上的可测函数(把 $x\in\mathbf{R}^p$ 固定).

**定理 5.7.1(Tonelli 定理)** 设 $f(x,y)$是 $\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ 上的非负可测函数，则

(A) 对几乎处处的 $x\in\mathbf{R}^p$，$f(x,y)$作为 $y$ 的函数是 $\mathbf{R}^q$ 上的非负可测函数；

(B) $F(x)=\int_{\mathbf{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y$ 是 $\mathbf{R}^p$ 上的非负可测函数；

(C) $\int_{\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathbf{R}^p}\left(\int_{\mathbf{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$.

**证** 我们将就 $f(x,y)$ 由简单到复杂的情况逐步加以证明.

(1) 设 $f(x,y)=\chi_E(x,y)$，这里的 $E$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的矩体.

设 $E=I_1\times I_2$，而 $I_1$ 与 $I_2$ 分别为 $\mathbf{R}^p$ 与 $\mathbf{R}^q$ 中的矩体. 对每个 $x\in\mathbf{R}^p$，知 $\chi_E(x,y)$作为 $y$ 的函数是 $\mathbf{R}^q$ 上的非负可测函数，且

$$F(x)=\int_{\mathbf{R}^p}\chi_E(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}|I_2|, & x\in I_1;\\ 0, & x\notin I_1.\end{cases}$$

所以 $F(x)$是 $\mathbf{R}^p$ 上的非负可测函数，且有

$$\int_{\mathbf{R}^p}F(x)\mathrm{d}x=|I_1|\times|I_2|=|I|=m(I)=\int_{\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2) 设 $f(x,y)=\chi_E(x,y)$，这里 $E$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的开集.

设 $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}I_k$，其中$\{I_k\}$为 $\mathbf{R}^n$ 中互不相交的矩体. 令 $f_k(x,y)=\chi_{I_k}(x,y)(k=1,2,\cdots)$，则 $f(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(x,y)$. 由(1)知，每个 $f_k(x,y)$满足(A)、(B)、(C)，则 $f(x,y)$显然满足(A)与(B)，再由非负可测函数的逐项积分定理，有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q}f_k(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathbf{R}^p}\left(\int_{\mathbf{R}^q}f_k(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\&=\int_{\mathbf{R}^p}\left(\int_{\mathbf{R}^q}\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_{\mathbf{R}^p}\left(\int_{\mathbf{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(3) 设 $f(x,y)=\chi_E(x,y)$，这里 $E$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的有界$G_\delta$ 集.

不妨设 $E=\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k$，这里 $\{G_k\}$ 是递减有界开集列，记 $f_k(x,y)=\chi_{G_k}(x)(k=1,2,\cdots)$，则 $f(x,y)=\lim_{k\to\infty}f_k(x,y)$. 由(2)知每个 $f_k(x,y)$ 满足($A$)、($B$)、($C$)，故 $f(x,y)$ 满足($A$)、($B$)，再由控制收敛定理有

$$\int_{\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q}f_k(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbf{R}^p}\left(\int_{\mathbf{R}^q}f_k(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$
$$=\int_{\mathbf{R}^p}\left(\int_{\mathbf{R}^q}\lim_{k\to\infty}f_k(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_{\mathbf{R}^p}\left(\int_{\mathbf{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

(4) 设 $f(x,y)=\chi_E(x,y)$，这里 $E$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的有界零测集.

存在递减有界开集列 $\{G_k\}$，使 $E\subset G_k(k=1,2,\cdots)$ 及 $\lim_{k\to\infty}m(G_k)=0$. 令 $H=\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k$，则有 $E\subset H$ 及 $m(H)=0$. 记 $h(x,y)=\chi_H(x,y)$，由(3)知

$$\int_{\mathbf{R}^p}\left(\int_{\mathbf{R}^q}h(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q}h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

所以对几乎处处的 $x\in\mathbf{R}^p$，有 $\int_{\mathbf{R}^q}h(x,y)\mathrm{d}y=0$，从而得 $h(x,y)$ 作为 $y\in\mathbf{R}^q$ 的函数几乎处处为 0. 因为 $0\leqslant f(x,y)\leqslant h(x,y)$，所以对几乎处处的 $x\in\mathbf{R}^p$，$f(x,y)$ 作为 $y\in\mathbf{R}^q$ 的函数也几乎处处为 0，故满足($A$). 因为对几乎处处的 $x\in\mathbf{R}^p$，有 $F(x)=\int_{\mathbf{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y=0$，故 $f(x,y)$ 也满足($B$). 而 $f(x,y)$ 满足($C$)是显然的.

(5) 设 $f(x,y)=\chi_E(x,y)$，这里 $E$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的有界可测集.

设 $E=H\backslash Z$，这里 $H$ 是有界 $G_\delta$ 集，$Z$ 是有界零测集，则

$$f(x,y)=\chi_H(x,y)-\chi_Z(x,y).$$

由(3)与(4)知 $\chi_H(x,y)$ 与 $\chi_Z(x,y)$ 皆满足(A)、(B)、(C)，故 $f(x,y)$ 也满足(A)、(B)、(C).

(6) 设 $f(x,y)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上具有紧支集的非负可测简单函数.

设 $f(x,y)=\sum_{k=1}^{p}c_k\chi_{E_k}(x,y)$，这里每个 $E_k$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的有界可测集. 由(5)知每个 $\chi_E(x,y)$ 满足(A)、(B)、(C)，故 $f(x,y)$ 也满足(A)、(B)、(C).

(7) 设 $f(x,y)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上非负可测函数.

由简单函数的逼近定理，知存在 $\mathbf{R}^n$ 上具有紧支集的非负可测简单函数列

$\{f_k(x,y)\}$,使得

$$f_1(x,y)\leqslant f_2(x,y)\leqslant\cdots\leqslant f_k(x,y)\leqslant\cdots,\lim_{k\to\infty}f_k(x,y)=f(x,y).$$

由(6)知每个 $f_E(x,y)$ 满足(A)、(B)、(C),故 $f(x,y)$ 也满足(A)、(B),再由 Levi 渐升列积分定理,有

$$\int_{\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q}f_k(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbf{R}^p}\left(\int_{\mathbf{R}^q}f_k(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\mathbf{R}^p}\left(\int_{\mathbf{R}^q}\lim_{k\to\infty}f_k(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_{\mathbf{R}^p}\left(\int_{\mathbf{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

**定理 5.7.2(Fubini 定理)** 设 $f(x,y)$ 是 $\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ 上的可积函数,则

(A) 对几乎处处的 $x\in\mathbf{R}^p$,$f(x,y)$ 作为 $y$ 的函数是 $\mathbf{R}^q$ 上的可积函数;

(B) $F(x)=\int_{\mathbf{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y$ 是 $\mathbf{R}^p$ 上的可积函数;

(C) $\int_{\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathbf{R}^p}\left(\int_{\mathbf{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$.

**证** 由 $f(x,y)=f^+(x,y)-f^-(x,y)$,及 $f^+(x,y)$ 与 $f^-(x,y)$ 都是 $\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ 上的可积函数,利用定理 5.7.1(即 Tonelli 定理)即得.

**推论 5.7.3** 设 $A\subset\mathbf{R}^p$,$B\subset\mathbf{R}^q$,$E=A\times B\subset\mathbf{R}^n(n=p+q)$,则

(1) 若 $f(x,y)$ 是 $A\times B$ 上的非负可测函数,有

$$\int_{A\times B}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_A\left(\int_B f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_B\left(\int_A f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

(2) 若 $f(x,y)$ 是 $A\times B$ 上的可积函数,有

$$\int_{A\times B}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_A\left(\int_B f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_B\left(\int_A f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

**证** 令

$$g(x,y)=\begin{cases}f(x,y), & (x,y)\in A\times B;\\ 0, & (x,y)\in\mathbf{R}^n\setminus(A\times B).\end{cases}$$

对 $g(x,y)$,在 $\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ 上用定理 5.7.1 和定理 5.7.2 即得.

**例 5.7.1** 设 $f(x,y)$ 是 $A\times B$ 上的可测函数,若 $\int_A\left(\int_B|f(x,y)|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x<+\infty$,则

$$\int_{A\times B}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_A\left(\int_B f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_B\left(\int_A f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

**证** 因为 $|f(x,y)|$ 是 $A\times B$ 上的非负可测函数,故有

$$\int_{A\times B}|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_A\left(\int_B|f(x,y)|\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x<+\infty.$$

所以 $f(x,y)$是 $A\times B$ 上的可积函数,从而得

$$\int_{A\times B}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_A\left(\int_B f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_B\left(\int_A f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

**定义 5.7.1**　设 $f(x)$在 $E$ 上可测,则称

$$f_*(\lambda)=m(\{x\in E:|f(x)|>\lambda\}),\lambda>0$$

为 $f(x)$在 $E$ 上的**分布函数**.

**命题 5.7.4**　设 $f(x)$在 $E$ 上可测,则对 $1\leqslant p<\infty$,有

$$\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x=p\int_0^\infty\lambda^{p-1}f_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

**证**　令

$$F(x,\lambda)=\begin{cases}1, & |f(x)|>\lambda;\\ 0, & |f(x)|\leqslant\lambda.\end{cases}$$

则由定理 5.7.1,有

$$\begin{aligned}\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x&=\int_E\mathrm{d}x\int_0^{|f(x)|}p\lambda^{p-1}\mathrm{d}\lambda=\int_E\mathrm{d}x\int_0^\infty p\lambda^{p-1}F(x,\lambda)\mathrm{d}\lambda\\&=\int_0^\infty\mathrm{d}\lambda\int_E p\lambda^{p-1}F(x,\lambda)\mathrm{d}x=\int_0^\infty p\lambda^{p-1}\mathrm{d}\lambda\int_E F(x,\lambda)\mathrm{d}x\\&=\int_0^\infty p\lambda^{p-1}\mathrm{d}\lambda\int_{\{x\in E:|f(x)|>\lambda\}}\mathrm{d}x=p\int_0^\infty\lambda^{p-1}f_*(\lambda)\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

**注 5.3**　若令 $g(\lambda)=m(\{x\in E:|f(x)|\geqslant\lambda\}),\lambda>0$,则对 $1\leqslant p<\infty$,类似可得

$$\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x=p\int_0^\infty\lambda^{p-1}g(\lambda)\mathrm{d}\lambda.$$

## 5.8　例题选讲

**例 5.8.1**　设 $f(x)$为 $E$ 上的非负可测函数,记 $E_k=\{x\in E:f(x)\geqslant k\}(k=1,2,\cdots)$,证明:若 $f\in L(E)$,则 $\sum_{k=1}^\infty m(E_k)<\infty$;若 $m(E)<\infty$,则反之亦然.

**证**　先证明:对任意 $x\in E$,有 $\sum_{k=1}^\infty\chi_{E_k}(x)\leqslant f(x)\leqslant 1+\sum_{k=1}^\infty\chi_{E_k}(x)$.

若 $0\leqslant f(x)<1$ 或 $f(x)=+\infty$,不等式显然成立. 下设 $m\leqslant f(x)<m+1$,则有

$$\sum_{k=1}^\infty\chi_{E_k}(x)=m\leqslant f(x)<1+m\leqslant 1+\sum_{k=1}^\infty\chi_{E_k}(x).$$

于是由该不等式得

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{E_k}(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E \left(1+\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{E_k}(x)\right)\mathrm{d}x ,$$

再由非负可测函数的逐项积分定理得

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\int_E \chi_{E_k}(x)\mathrm{d}x = \int_E \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{E_k}(x)\mathrm{d}x .$$

从而有

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) \leqslant \int_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant m(E) + \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) ,$$

即得证明.

**注 5.4** 本例题给出了非负可测函数 $f(x)$ 可积性与正项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m(E_k)$ 收敛性的关系,再利用数学分析中正项级数收敛的判别法则,可以解决一类函数可积性的问题.

**例 5.8.2** 设 $f(x)$ 为 $E$ 上的非负可测函数,记 $E_k=\{x\in E: f(x)\geqslant k\}(k=1,2,\cdots)$,若 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{m(E_{k+1})}{m(E_k)}<1$ 且 $m(E)<\infty$,试证:$f\in L(E)$.

**证** 因为 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{m(E_{k+1})}{m(E_k)}<1$,由正项级数的比值判别法知 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m(E_k)<\infty$,再由例 5.8.1,有 $f\in L(E)$.

**例 5.8.3** 设 $f(x)$ 为 $E$ 上的非负可测函数,记 $E_k=\{x\in E: f(x)\geqslant k\}(k=1,2,\cdots)$,若 $\lim\limits_{k\to\infty} k^p m(E_k)=c\,(p>1, 0\leqslant c<1)$ 且 $m(E)<\infty$,试证:$f\in L(E)$.

**证** 因为 $\lim\limits_{k\to\infty} k^p m(E_k)=c\,(p>1, 0\leqslant c<1)$,考虑收敛的 $P$-级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$,由正项级数的比较判别法知 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m(E_k)<\infty$,再由例 5.8.1,有 $f\in L(E)$.

**例 5.8.4** 设 $f(x)$ 为 $E$ 上的非负可测函数,记 $E_k=\{x\in E: f(x)\geqslant k\}(k=1,2,\cdots)$,若级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2(m(E_k))^2$ 收敛且 $m(E)<\infty$,试证:$f\in L(E)$.

**证** 因为 $m(E_k)=\frac{1}{k}\cdot km(E_k)\leqslant\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k^2}+k^2(m(E_k))^2\right]$,而级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2(m(E_k))^2$ 与 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ 皆为收敛级数,所以有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m(E_k)<\infty$,再由 $m(E)<\infty$ 及例 5.8.1 知 $f\in L(E)$.

**例 5.8.5** 设 $f(x)$为 $E$ 上的可测函数,记 $g(\lambda)=m(\{x\in E:|f(x)|\geqslant\lambda\})$,证明:若 $f\in L(E)$,则 $\int_1^{+\infty} g(\lambda)\mathrm{d}\lambda<\infty$;若 $m(E)<\infty$,则反之亦然.

**证一** 因为 $g(\lambda)$是非负的单调下降函数,则

$$\int_1^{+\infty} g(\lambda)\mathrm{d}\lambda\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}g(k)\leqslant\int_0^{+\infty} g(\lambda)\mathrm{d}\lambda\leqslant g(0)+\int_1^{+\infty} g(\lambda)\mathrm{d}\lambda=m(E)+\int_1^{+\infty} g(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

若 $f\in L(E)$,则由例 5.8.1 知 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}g(k)<\infty$,由上述不等式得 $\int_1^{+\infty} g(\lambda)\mathrm{d}\lambda<\infty$.

若 $\int_1^{+\infty} g(\lambda)\mathrm{d}\lambda<\infty$,则由上述不等式知 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}g(k)<\infty$,在条件 $m(E)<\infty$下由例 5.8.1 得 $f\in L(E)$.

**证二** 利用命题 5.7.4 后的注 5.3 来证明.

**注 5.5** 本例题给出了可测函数 $f(x)$可积性与广义积分 $\int_1^{+\infty} g(\lambda)\mathrm{d}x$ 收敛性的关系,再利用数学分析中广义积分收敛的判别法则,可以解决一类函数可积性的问题.

**例 5.8.6** 设 $f(x)$为 $E$ 上的非负可积函数,记 $E_k=\{x\in E:f(x)\geqslant k\}(k=1,2,\cdots)$,试证:(1) $\lim\limits_{k\to\infty}m(E_k)=0$;(2) $\lim\limits_{k\to\infty}km(E_k)=0$.

**证一** (1) 对每个 $k$,有

$$km(E_k)=\int_{E_k}k\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

故有 $m(E_k)\leqslant\frac{1}{k}\int_E f(x)\mathrm{d}x$,再由 $f(x)$的可积性,知$\lim\limits_{k\to\infty}m(E_k)=0$.

(2) 因 $f(x)$为 $E$ 上的非负可积函数,由积分的绝对连续性,知对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使当可测集 $e\subset E$ 且 $m(e)<\delta$ 时,有 $\int_e f(x)\mathrm{d}x<\varepsilon$.

由(1)知$\lim\limits_{k\to\infty}m(E_k)=0$,对上述 $\delta>0$,存在 $k_0$,使当 $k>k_0$ 时有 $m(E_k)=\delta$,于是

$$km(E_k)=\int_{E_k}k\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon,$$

即有$\lim\limits_{k\to\infty}km(E_k)=0$.

**证二** 记 $g(\lambda)=m(\{x\in E:f(x)\geqslant\lambda\})$,由例 5.8.5 有 $\int_1^{+\infty} g(\lambda)\mathrm{d}\lambda<\infty$,而 $g(\lambda)$是非负的单调下降函数,所以有$\lim\limits_{\lambda\to\infty}g(\lambda)=0$,即得$\lim\limits_{k\to\infty}m(E_k)=0$.

再从 $2\lambda\cdot g(2\lambda)\leqslant 2\int_{\lambda}^{2\lambda}g(t)\mathrm{d}t\to 0$，知$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda g(\lambda)=0$，即得$\lim\limits_{k\to\infty}km(E_k)=0$.

**注 5.6** 本题也可以用例 5.8.1 来证明.

**例 5.8.7** 设 $f(x),f_k(x)(k=1,2,\cdots)$是 $E$ 上非负可测函数，若函数列$\{f_k(x)\}$在 $E$ 上几乎处处收敛于 $f(x)$，且有 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x<\infty$. 试证明：

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

**证** 对每个 $k$，有 $f(x)+f_k(x)-|f(x)-f_k(x)|\geqslant 0$，用 Fatou 引理有

$$\int_E \varliminf_{k\to\infty}(f(x)+f_k(x)-|f(x)-f_k(x)|)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \varliminf_{k\to\infty}\int_E(f(x)+f_k(x)-|f(x)-f_k(x)|)\mathrm{d}x,$$

于是

$$\int_E 2f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E 2f(x)\mathrm{d}x-\varlimsup_{k\to\infty}\int_E |f(x)-f_k(x)|\mathrm{d}x.$$

因为 $f\in L(E)$，故消去$\int_E 2f(x)\mathrm{d}x$ 后得 $\varlimsup\limits_{k\to\infty}\int_E |f(x)-f_k(x)|\mathrm{d}x\leqslant 0$，所以

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |f(x)-f_k(x)|\mathrm{d}x=0.$$

**例 5.8.8** 设$\{f_k(x)\}$是 $E$ 上非负可测函数列，且$\{f_k(x)\}$依测度收敛于 $f(x)$，证明：$\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\varliminf\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x$.

**证** （反证法）若 $\int_E f(x)\mathrm{d}x>\varliminf\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x$，则在$\{f_k(x)\}$中取出子列$\{f_{k_i}(x)\}$，使得 $\lim\limits_{i\to\infty}\int_E f_{k_i}(x)\mathrm{d}x$ 存在，且$\int_E f(x)\mathrm{d}x>\lim\limits_{i\to\infty}\int_E f_{k_i}(x)\mathrm{d}x$.

因为$\{f_{k_i}(x)\}$依测度收敛于 $f(x)$，由 Riesz 定理不妨假设$\lim\limits_{i\to\infty}f_{k_i}(x)=f(x)$，*a.e.* 再由 Fatou 引理，知

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\lim_{i\to\infty}\int_E f_{k_i}(x)\mathrm{d}x.$$

得矛盾，所以$\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\varliminf\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x$.

**例 5.8.9** 设 $f(x),f_k(x)(k=1,2,\cdots)$是 $E$ 上非负可测函数，若函数列

$\{f_k(x)\}$在 $E$ 上依测度收敛于 $f(x)$，且有 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x<\infty$. 试证明：

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

**证** 把例 5.8.7 的证明稍作修改(当时用 Fatou 引理,现在用例 5.8.8)即得.

**例 5.8.10(依测度收敛控制收敛定理)** 设$\{f_k(x)\}$是 $E$ 上的可测函数列，且$\{f_k(x)\}$依测度收敛于 $f(x)$. 若存在控制函数 $F\in L(E)$，使$|f_k(x)|\leqslant F(x)$，a.e. 于 $E(k=1,2,\cdots)$，则

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

**证** 对每个 $k$，有 $2F(x)-|f(x)-f_k(x)|\geqslant 0$，a.e. 于 $E$，则函数列$\{2F-|f-f_k|\}$为几乎处处非负且依测度收敛于 $2F$. 用例 5.8.8 有

$$\begin{aligned}\int_E 2F(x)\mathrm{d}x &\leqslant \varliminf_{k\to\infty}\int_E (2F(x)-|f(x)-f_k(x)|)\mathrm{d}x\\ &=\int_E 2F(x)\mathrm{d}x-\varlimsup_{k\to\infty}\int_E |f(x)-f_k(x)|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因为 $F\in L(E)$，故消去$\int_E 2F(x)\mathrm{d}x$ 后得 $\varlimsup\limits_{k\to\infty}\int_E |f(x)-f_k(x)|\mathrm{d}x\leqslant 0$，所以

$$\lim_{k\to\infty}\int_E |f(x)-f_k(x)|\mathrm{d}x=0.$$

再由 $\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x-\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\int_E |f(x)-f_k(x)|\mathrm{d}x\right|$，知

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

**例 5.8.11** 设 $f(x),f_k(x)(k=1,2,\cdots)$是 $E$ 上非负可测函数，若函数列$\{f_k(x)\}$在 $E$ 上几乎处处收敛于 $f(x)$，且有 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x<\infty$. 试证明：对于 $E$ 中任一可测子集 $e$，有 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_e f_k(x)\mathrm{d}x=\int_e f(x)\mathrm{d}x$.

**证** 由例 5.8.7 有 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E |f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0$，于是对 $E$ 中任一可测子集 $e$，有 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_e |f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0$，所以得$\lim\limits_{k\to\infty}\int_e f_k(x)\mathrm{d}x=\int_e f(x)\mathrm{d}x$.

**例 5.8.12** 设 $f(x),f_k(x)(k=1,2,\cdots)$是 $E$ 上可测函数，若 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E |f_k(x)-$

$f(x)|\mathrm{d}x=0$,试证明:$f_k \xrightarrow{m} f$

**证** 对任意的 $\varepsilon>0$,有

$$\varepsilon\cdot m(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\})\leqslant\int_{\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\}}|f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\int_E|f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x\longrightarrow 0$$

所以$\lim\limits_{k\to\infty}m(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon\})=0$,即有 $f_k \xrightarrow{m} f$.

**例 5.8.13** 设$\{f_k(x)\}$是 $E$ 上非负可测函数列,且 $m(E)<\infty$,证明:$f_k\xrightarrow{m}0$当且仅当 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E\frac{f_k}{1+f_k}\mathrm{d}x=0$.

**证** 充分性. 设 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E\frac{f_k}{1+f_k}\mathrm{d}x=0$,由例 5.8.12 知$\frac{f_k}{1+f_k}\xrightarrow{m}0$. 因为 $\varphi(x)=\frac{x}{1+x}$在$(0,+\infty)$上单调增加,故对任意的 $\varepsilon>0$,有

$$m(\{x\in E:f_k(x)\geqslant\varepsilon\})\leqslant m\left(\left\{x\in E:\frac{f_k(x)}{1+f_k(x)}\geqslant\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right\}\right)\longrightarrow 0,$$

即有 $f_k\xrightarrow{m}0$.

必要性. 设 $f_k\xrightarrow{m}0$,对任意的 $\varepsilon>0$(不妨设 $0<\varepsilon<1$),则

$$m\left(\left\{x\in E:\frac{f_k(x)}{1+f_k(x)}\geqslant\varepsilon\right\}\right)=m\left(\left\{x\in E:f_k(x)\geqslant\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right\}\right)\longrightarrow 0.$$

所以$\frac{f_k}{1+f_k}\xrightarrow{m}0$,再由$\left|\frac{f_k(x)}{1+f_k(x)}\right|\leqslant 1$ 及例 5.8.10,知$\lim\limits_{k\to\infty}\int_E\frac{f_k}{1+f_k}\mathrm{d}x=0$.

**例 5.8.14** 设 $f\in L((0,\infty))$,令 $f_k(x)=f(x)\chi_{(0,k)}(x)\ (k=1,2,\cdots)$,则$\{f_k(x)\}$在$(0,\infty)$上依测度收敛于 $f(x)$.

**证** 因为$\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$,由$|f(x)-f_k(x)|\leqslant 2|f(x)|$及 $f\in L((0,\infty))$,用控制收敛定理,有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{(0,\infty)}|f(x)-f_k(x)|\mathrm{d}x=\int_{(0,\infty)}\lim_{k\to\infty}|f(x)-f_k(x)|\mathrm{d}x=0.$$

再由例 5.8.12,有 $f_k\xrightarrow{m}f$.

**例 5.8.15** 设 $f\in L((0,\infty))$,试证明:函数 $g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{x+t}\mathrm{d}t$ 在$(0,\infty)$上

连续.

**证** 设 $x_0\in(0,\infty)$,若任意的点列 $\{x_k\}\subset(0,\infty)$,$x_k\to x_0$,则存在 $k_0$,使对任意的 $k\geqslant k_0$,有 $x_k>\frac{x_0}{2}$,于是有 $\left|\frac{f(t)}{x_k+t}\right|<\frac{2}{x_0}|f(t)|\in L((0,\infty))$,用控制收敛定理,有

$$\lim_{k\to\infty}g(x_k)=\lim_{k\to\infty}\int_0^\infty\frac{f(t)}{x_k+t}\mathrm{d}t=\int_0^\infty\lim_{k\to\infty}\frac{f(t)}{x_k+t}\mathrm{d}t=\int_0^\infty\frac{f(t)}{x_0+t}\mathrm{d}t=g(x_0).$$

所以有 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$,即函数 $g(x)$ 在点 $x_0$ 处连续,从而得 $g(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上连续.

**例 5.8.16** 设 $f\in L(E)$,记 $E_k=\left\{x\in E:|f(x)|<\frac{1}{k}\right\}$,试证明:

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}|f(x)|\,\mathrm{d}x=0.$$

**证** 令 $f_k(x)=f(x)\chi_{E_K}(x)(k=1,2,\cdots)$,则 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=0$.

因为 $|f_k(x)|\leqslant|f(x)|(k=1,2,\cdots)$ 及 $f\in L(E)$,用控制收敛定理有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}|f(x)|\,\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_E|f_k(x)|\,\mathrm{d}x=\int_E\lim_{k\to\infty}|f_k(x)|\,\mathrm{d}x=0.$$

**例 5.8.17** 设 $\{f_k(x)\}$,$\{g_k(x)\}$ 是 $E\subset R^n$ 上两个可测函数列,且有 $|f_k(x)|\leqslant g_k(x)$,$x\in E$. 若 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$,$\lim\limits_{k\to\infty}g_k(x)=g(x)$,及 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x=\int_E g(x)\mathrm{d}x<\infty$,试证明:$\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

**证** (1)对 $\{g_k(x)-f_k(x)\}$ 用 Fatou 引理,有

$$\int_E[g(x)-f(x)]\mathrm{d}x\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\int_E[g_k(x)-f_k(x)]\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x-\varlimsup_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x,$$

故 $\int_E g(x)\mathrm{d}x-\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\lim\limits_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x-\varlimsup\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x$,由 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x=\int_E g(x)\mathrm{d}x<\infty$,有

$$\varlimsup_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 对 $\{g_k(x)+f_k(x)\}$ 用 Fatou 引理,有

$$\int_E[g(x)+f(x)]\mathrm{d}x\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\int_E[g_k(x)+f_k(x)]\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x+\varliminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x,$$

故 $\int_E g(x)\mathrm{d}x+\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x+\varliminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x$，

由 $\lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x=\int_E g(x)\mathrm{d}x<\infty$，有

$$\varliminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

最后由(1)(2)，得 $\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

**注 5.7** 本题也可对函数列$\{g+g_k-|f-f_k|\}$用 Fatou 引理来证明.

**例 5.8.18** 设 $f(x)$是 $E\subset R^n$ 上的非负可测函数.若存在 $E_k\subset E,m(E\setminus E_k)<\frac{1}{k}(k=1,2,\cdots)$，使得 $\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x$ 存在且有限，试证明：$f(x)$在 $E$ 上可积.

**证** 令 $f_k(x)=f(x)\chi_{E_k}(x)(k=1,2,\cdots)$，对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$m\{x\in E\,\big|\,|f(x)-f_k(x)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant m(E\setminus E_k)<\frac{1}{k}\to 0.$$

所以函数列$\{f_k(x)\}$在 $E$ 上依测度收敛于 $f(x)$. 再由 Riesz 定理，知存在子列$\{f_{k_i}(x)\}$，使$\lim_{i\to\infty}f_{k_i}(x)=f(x)$，$a.e.\ x\in E$. 对该子列用 Fatou 引理，有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\varliminf_{i\to\infty}\int_E f_{k_i}(x)\mathrm{d}x=\varliminf_{i\to\infty}\int_{E_{k_i}}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x<\infty.$$

故 $f(x)$在 $E$ 上可积.

**例 5.8.19** 设有定义在 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的函数 $f(x)$，如果对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $g,h\in L(E)$，满足 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)(x\in E)$，并且使得 $\int_{\mathbf{R}^n}[h(x)-g(x)]\mathrm{d}x<\varepsilon$，试证明：$f\in L(E)$.

**证** 对每个 $k$，存在 $g_k,h_k\in L(E)$，满足 $g_k(x)\leqslant f(x)\leqslant h_k(x)(x\in E)$，并且使得 $\int_E[h_k(x)-g_k(x)]\mathrm{d}x<\frac{1}{k}$. 令

$$g(x)=\sup_{k\geqslant 1}\{g_k(x)\},h(x)=\inf_{k\geqslant 1}\{h_k(x)\},$$

则 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)(x\in E)$，且 $g(x),h(x)$ 皆为可测函数. 对任意的 $k$ 有

$$\int_E[h(x)-g(x)]\mathrm{d}x\leqslant\int_E[h_k(x)-g_k(x)]\mathrm{d}x<\frac{1}{k},$$

故必有 $\int_E[h(x)-g(x)]\mathrm{d}x=0$. 因为 $h(x)-g(x)\geqslant 0$，知 $h(x)-g(x)=0$，$a.e.$ 于 $E$.

再由 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，知 $f(x)=g(x)$，a. e. 从而得 $f(x)$ 是 $E$ 上的可测函数.

因为 $g_1(x)\leqslant f(x)\leqslant h_1(x)(x\in E)$ 及 $g_1,h_1\in L(E)$，所以 $f\in L(E)$.

**例 5.8.20** 若 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 是$[0,1]$中的可测集，$[0,1]$中每一点至少属于上述集合中的 $k$ 个($k\leqslant n$)，则在 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 中必有一个点集的测度大于或等于$\frac{k}{n}$.

**证** 因为当 $x\in[0,1]$时，有$\sum\limits_{i=1}^{n}\chi_{E_i}(x)\geqslant k$，所以

$$\sum_{i=1}^{n}m(E_i)=\sum_{i=1}^{n}\int_{[0,1]}\chi_{E_i}(x)\mathrm{d}x=\int_{[0,1]}\sum_{i=1}^{n}\chi_{E_i}(x)\mathrm{d}x\geqslant k.$$

若每个 $m(E_i)$皆小于$\frac{k}{n}$，则$\sum\limits_{i=1}^{n}m(E_i)<\frac{k}{n}\cdot n=k$，得矛盾.

**例 5.8.21** 设 $f\in L(E)$，$E_k\subset E(k=1,2,\cdots)$，且$\lim\limits_{k\to\infty}m(E_k)=m(E)<\infty$，试证明：$\lim\limits_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

**证** 因为 $f\in L(E)$，由积分的绝对连续性，知对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $e\subset E$ 且 $m(e)<\delta$ 时，有 $\left|\int_e f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$.

由 $E_k\subset E(k=1,2,\cdots)$ 及$\lim\limits_{k\to\infty}m(E_k)=m(E)<\infty$，知$\lim\limits_{k\to\infty}m(E\setminus E_k)=0$. 于是对上述 $\delta>0$，存在 $k_0$，当 $k>k_0$ 时，有 $m(E\setminus E_k)<\delta$，于是

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x-\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{E\setminus E_k}f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

所以有 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

**例 5.8.22** 设 $f\in L(\mathbf{R}^n)$，若对 $\mathbf{R}^n$ 上任一具紧支集的连续函数 $g(x)$，有 $\int_{\mathbf{R}^n}f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$，试证明：$f(x)=0$，a. e. 于 $\mathbf{R}^n$.

**证** 对每个 $k$，记 $E_k=\left\{x\in\mathbf{R}^n:f(x)>\frac{1}{k}\right\}$.

若 $m(E_k)>0$，则存在有界闭集 $F\subset E_k$，使 $m(F)>0$. 因 $f\in L(\mathbf{R}^n)$，由积分的绝对连续性，知对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当可测集 $e\subset\mathbf{R}^n$ 且 $m(e)<\delta$ 时，有 $\int_e|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$. 对上述 $\delta>0$，取有界开集 $G\supset F$，使 $m(G\setminus F)<\delta$.

由定理 2.6.5,知存在连续函数 $g:\mathbf{R}^n\to[0,1]$,使当 $x\in F$ 时,$g(x)=1$;当 $x\in\mathbf{R}^n\setminus G$ 时,$g(x)=0$. 易知 $g(x)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上具紧支集的连续函数,于是

$$\int_F f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_{G\setminus F}f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_G f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}^n}f(x)g(x)\mathrm{d}x=0.$$

故有 $\left|\int_F f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{G\setminus F}f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$,由 $\varepsilon$ 任意性可知 $\int_F f(x)\mathrm{d}x=0$,但是这与 $\int_F f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{k}m(F)>0$ 相矛盾.所以 $E_k$ 必定为零测集.

从而得 $\{x\in\mathbf{R}^n:f(x)>0\}=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$ 为零测集,类似可证 $\{x\in\mathbf{R}^n:f(x)<0\}$ 也为零测集,所以 $f(x)=0$, $a.e.$ 于 $\mathbf{R}^n$.

**例 5.8.23** 证明:$\lim\limits_{k\to\infty}\int_{[0,\infty)}\left(1+\frac{x}{k}\right)^k\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\int_{[0,\infty)}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

**证** 令 $f_k=\left(1+\frac{x}{k}\right)^k\mathrm{e}^{-2x}\chi_{[0,\infty)}(x)(k=1,2,\cdots)$,则 $\{f_k\}$ 为非负可测函数渐升列,且 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=\mathrm{e}^{-x}$. 由 Levi 定理,有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{[0,\infty)}\left(1+\frac{x}{k}\right)^k\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\lim_{k\to\infty}\int_{[0,\infty)}f_k(x)\mathrm{d}x=\int_{[0,\infty)}\lim_{k\to\infty}f_k(x)\mathrm{d}x=\int_{[0,\infty)}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$

**例 5.8.24** 设 $f:[0,1]\to[a,b]$ 是 Riemann 可积函数,$g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数,则 $f[g(x)]$ 在 $[0,1]$ 上是 Riemann 可积函数.

**证** 记 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的不连续点集为 $E$,因为 $f(x)$ 是 Riemann 可积函数,故 $m(E)=0$. 记 $f[g(x)]$ 在 $[0,1]$ 上的不连续点集为 $F$,则有 $F\subset E$,从而得 $m(F)=0$,所以有界函数 $f[g(x)]$ 在 $[0,1]$ 上是 Riemann 可积函数.

**例 5.8.25** 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数,记不连续点集为 $E$,若 $E'$ 是至多可数集,则 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的 Riemann 可积函数.

**证** 因为 $E'$ 是至多可数集,由例 2.9.4 可以知道 $f(x)$ 的不连续点集 $E$ 是至多可数集,所以 $m(E)=0$,于是 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的 Riemann 可积函数.

# 习 题 五

1. 设 $f(x)$是 $E$ 上几乎处处大于零的可测函数,且 $\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$ ,则 $m(E)=0$.

2. 设 $f(x),g(x)$是 $E$ 上的非负可积函数,证明:$\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$也是 $E$ 上的非负可积函数.

3. 设$\{E_k\}$是 $\mathbf{R}^n$ 中的递增可测集列,$E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$,若 $f(x)$是 $E$ 上的非负可测函数,试证明:$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x$.

4. 设 $f(x)$是 $E$ 上的非负可测函数,令

$$f_k(x)=\begin{cases}f(x), & f(x)\leqslant k;\\ k, & f(x)>k.\end{cases}$$

试证明:$\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

5. 设 $m(E)<\infty$,$f^3(x)$是 $E$ 上非负可积函数,则 $f^2(x)$在 $E$ 上可积.

6. 设 $f(x)$是 $\mathbf{R}^1$ 上的非负可积函数,令 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t,x\in\mathbf{R}^1$,若 $F\in L(\mathbf{R}^1)$ ,试证明:$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=0$.

7. 设 $f(x)$是 $E\subset\mathbf{R}$ 上的非负可积函数,若 $\int_E f(x)\mathrm{d}x=1$ ,则 $\int_E f(x)\cos x\mathrm{d}x\neq 1$.

8. 设 $f\in L(E)$,若对 $E$ 上的任意有界可测函数 $\varphi(x)$,都有 $\int_E f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=0$ ,证明:$f(x)=0$,*a.e.* 于 $E$.

9. 设 $f\in L(\mathbf{R})$,证明:$\int_a^b f(x+t)\mathrm{d}x=\int_{a+t}^{b+t}f(x)\mathrm{d}x$.

10. 设 $f(x)$是 $\mathbf{R}$ 上可测的周期函数,$T$ 是其正周期,$f\in L([0,T])$,证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

11. 设 $f\in L(E)$，$E_k\subset E$，$m(E\setminus E_k)<\dfrac{1}{k}(k=1,2,\cdots)$，则 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

12. 设 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x),\cdots$ 都是 $L(\mathbf{R}^n)$ 中的非负可积函数，且对任一可测集 $E$ 有 $\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E f_{k+1}(x)\mathrm{d}x(k=1,2,\cdots)$，证明：$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_k(x)\leqslant\cdots$，$a.e.$ 于 $E$.

13. 设 $f(x)$ 是有界闭集 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的可测函数，若对任意的 $x\in E$，存在 $\delta>0$，使 $f\in L(E\cap B(x,\delta))$. 证明：$f\in L(E)$.

14. 设 $f\in L(E)$，$\{E_k\}$ 是递增可测集列，$E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$，则 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

15. 设 $f\in L(\mathbf{R})$，令 $f_k(x)=f(x)\chi_{[-k,k]}(x)(k=1,2,\cdots)$，证明：

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbf{R}}|f(x)-f_k(x)|\,\mathrm{d}x=0.$$

16. 设 $f,f_k\in L(E)(k=1,2,\cdots)$，且有 $\int_E|f_k(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant 1/k^2(k=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$，$a.e.$ 于 $E$.

17. 设 $f\in L(\mathbf{R})$，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，$x\in\mathbf{R}$，若 $F(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的递增函数，$H$ 是 $\mathbf{R}$ 中的可测集，试证明：$\int_H f(t)\mathrm{d}t\geqslant 0$.

18. 设 $F\subset[0,1]$ 是闭集，且 $m(F)=0$，证明：$\chi_F(x)$ 在 $[0,1]$ 上为 Riemann 可积.

19. 设 $f:[0,1]\to[a,b]$ 是 Riemann 可积函数，$g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，则 $g[f(x)]$ 是 $[0,1]$ 上的 Riemann 可积函数.

20. 若 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E|f_k(x)-f(x)|^2\mathrm{d}x=0$，证明：在 $\{f_k(x)\}$ 中存在子列 $\{f_{k_i}(x)\}$，使得 $f_{k_i}(x)\xrightarrow{a.e.}f(x)$.

21. 设 $\{f_k(x)\}$ 在 $E$ 上依测度收敛于 $f(x)$，若存在 $M>0$，使 $\int_E|f_k(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant$

$M$,$(k=1,2,\cdots)$,试证明:$f\in L(E)$.

22. 设 $f(x)$是 $E$ 上非负可积函数,证明:$\sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}m(\{x:f(x)\geqslant 2^k\})<\infty$.

23. 设 $f\in L([0,\infty))$在$[0,\infty)$上非负可积,$f(0)=0$ 且 $f'(0)$存在且有限,试证明:$\dfrac{f(x)}{x}\in L([0,\infty))$.

24. 设$\{f_k(x)\}$,$\{g_k(x)\}$是 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上两个可测函数列,且有$|f_k(x)|\leqslant g_k(x)$,$x\in E$.若有 $f_k\xrightarrow{m}f$,$g_k\xrightarrow{m}g$,及 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x=\int_E g(x)\mathrm{d}x<\infty$.试证明:$\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

25. 设 $f\in L(E)$,$m(E)<\infty$,$\{E_k\}$是 $E$ 中的递减可测集列,且 $m(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_k)=0$.试证明:$\lim\limits_{k\to\infty}\int_{E\setminus E_k}f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

26. 设 $f(x)$是 $E$ 上的正值可积函数,$0<q<m(E)<\infty$,记 $\Gamma=\{e:e\subset E,m(e)\geqslant q\}$,证明:$\inf\left\{\int_e f(x)\mathrm{d}x:e\in\Gamma\right\}>0$.

27. 设$\{f_k(x)\}$是 $E$ 上的非负可积函数列,若 $f_k\xrightarrow{m}f$,$\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$.则对 $E$ 中任一可测子集 $e$,有 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_e f_k(x)\mathrm{d}x=\int_e f(x)\mathrm{d}x$.

28. 设 $f(x)$,$f_k(x)$$(k=1,2,\cdots)$是 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上可测函数,且有 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$,以及 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E|f_k(x)|\mathrm{d}x=\int_E|f(x)|\mathrm{d}x<\infty$.试证明:

$$\lim_{k\to\infty}\int_E|f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

29. 设 $f\in L(E)$,$f(x)>0$$(x\in E)$,证明:$\lim\limits_{k\to\infty}\int_E[f(x)]^{1/k}\mathrm{d}x=m(E)$.

30. 设 $f,g\in L(E)$,$f_k,g_k\in L(E)$,$|f_k(x)|\leqslant M$$(k=1,2,\cdots)$,若

$$\lim_{k\to\infty}\int_E|f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0,\lim_{k\to\infty}\int_E|g_k(x)-g(x)|\mathrm{d}x=0,$$

证明:$\lim\limits_{k\to\infty}\int_E|f_k(x)g_k(x)-f(x)g(x)|\mathrm{d}x=0$.

31. 设 $f\in L(\mathbf{R})$,若对任何测度为 1 的开集 $G\subset\mathbf{R}$,有 $\int_G f(x)\mathrm{d}x=0$,则 $f(x)$

$=0$, a. e. 于 $\mathbf{R}$.

32. 设 $E\subset(0,2\pi)$是可测集，$\{t_n\}$是任一实数列，则 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E \cos^2(nx+t_n)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}m(E)$.

# 6 微分与不定积分

在数学分析中，我们有下述两个关于微分和积分的基本结论.

Ⅰ. 对于给定的在$[a,b]$上的连续函数 $f(x)$，它的不定积分

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+C \tag{6.1}$$

是 $x$ 的可微函数，且处处有

$$F'(x)=f(x). \tag{6.2}$$

Ⅱ. 若 $f(x)$在$[a,b]$上处处可导且导函数 $f'(x)$在$[a,b]$上连续，则等式

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b] \tag{6.3}$$

成立.

显然，上述两个基本结论中所出现的积分是指 Riemann 积分. 现在，我们有了 Lebesgue 积分，自然要考虑上述两个基本结论在 Lebesgue 积分框架下的推广. 对于第一个基本结论，我们将得到下述推广：

**结论** Ⅰ$'$. 设 $f\in L[a,b]$，则对于任意实常数 $C$，函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+C$ 在$[a,b]$ 上几乎处处有：$F'(x)=f(x)$.

对于第二个基本结论(常称为 Newton－Leibniz 公式)，我们要找到使(6.3)式，即 Newton－Leibniz 公式成立的最大函数类. 这种函数类恰好是所谓的“绝对连续函数类”. 我们将得到下述推广：

**结论** Ⅱ$'$. 对于$[a,b]$上定义的函数 $f(x)$，下述两个条件等价：

(i) $f(x)$在$[a,b]$上为绝对连续的；

(ii) $f'(x)$在$[a,b]$上几乎处处存在，$f'\in L^1[a,b]$且

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b].$$

我们讨论的线索是：单调函数⇒有界变差函数⇒结论Ⅰ$'$的证明⇒绝对连续函数⇒结论Ⅱ$'$的证明.

## 6.1　单调函数的可微性

本节的目的是证明 Lebesgue 的著名结论：单调函数是几乎处处可微的. 为此，我们需要 Vitali 覆盖引理.

**定义 6.1.1**　设 $E\subset\mathbf{R}^1$，$\Gamma$ 为区间族. 称 $\Gamma$ **按 *Vitali* 意义覆盖** $E$，若对于任意的 $x\in E$ 及 $\varepsilon>0$，存在 $I\in\Gamma$，使 $x\in I$ 且 $|I|<\varepsilon$. 这里，$\Gamma$ 中的成员可以是开区间、闭区间或半开半闭区间.

**引理 6.1.1(Vitali 覆盖引理)**　设 $E\subset\mathbf{R}^1$ 且 $m^*(E)<\infty$. 若区间族 $\Gamma$ 是 $E$ 的 Vitali 覆盖，则对于任意 $\varepsilon>0$，存在有限个互不相交的区间 $\{I_1,I_2,\cdots,I_n\}\subset\Gamma$，使

$$m^*(E\setminus\bigcup_{k=1}^{n}I_k)<\varepsilon. \tag{6.4}$$

**证**　不妨设 $\Gamma$ 中每个成员是闭区间. 倘不然，可取每个区间的闭包取代原来的区间，并注意到区间 $I_1,I_2,\cdots,I_n$ 的端点所成的集合是零测度集即可. 由外测度的定义，知存在开集 $G\supset E$，使 $m(G)<m^*(E)+1<\infty$. 因 $\Gamma$ 是 $E$ 的 Vitali 覆盖，可设 $\Gamma$ 中每个成员含于 $G$ 内. 设 $a_1=\sup\{|I|:I\in\Gamma\}$，则 $a_1\leqslant m(G)<\infty$. 取 $I_1\in\Gamma$，使 $|I_1|>\frac{1}{2}a_1$. 设 $a_2=\sup\{|I|:I\in\Gamma,I\cap I_1=\varnothing\}$ 并取 $I_2\in\Gamma$，使 $I_2\cap I_1=\varnothing$ 且 $|I_2|>\frac{1}{2}a_2$. 一般地，设 $a_{n+1}=\sup\{|I|:I\in\Gamma,I\cap I_k=\varnothing,k=1,2,\cdots,n\}$ 并取 $I_{n+1}\in\Gamma$，使 $I_{n+1}\cap I_k=\varnothing,k=1,2,\cdots,n$ 且 $|I_{n+1}|>\frac{1}{2}a_{n+1}$. 若到某一步已有 $E\subset\bigcup_{k=1}^{n}I_k$，则(6.4)式已成立. 倘不然，有 $x\in E$，使 $x\notin\bigcup_{k=1}^{n}I_k$. 由 $\Gamma$ 是 $E$ 的 Vitali 覆盖，知有 $I\in\Gamma$，使 $x\in I$ 且 $I\cap I_k=\varnothing,k=1,2,\cdots n$.　因而可一直继续这一过程，这样可从 $\Gamma$ 中选取互不相交的区间序列 $\{I_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 满足 $\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|\leqslant m(G)<\infty$. 对于任意 $\varepsilon>0$，存在自然数 $N$，使 $\sum_{n=N+1}^{\infty}|I_n|<\frac{\varepsilon}{5}$.

令 $T=E\setminus\bigcup_{n=1}^{N}I_n$. 倘能证 $m^*T<\varepsilon$，则证明完成. 接下来证这一点. 对于任意 $x\in T$，有 $x\notin\bigcup_{n=1}^{N}I_n$. 因 $\bigcup_{n=1}^{N}I_n$ 为闭集，可知 $x$ 与 $\bigcup_{n=1}^{N}I_n$ 之间有一个正距离. 由 Vitali 覆盖的意义，知存在 $I\in\Gamma$，使 $x\in I$ 且可使 $I$ 的长度足够小，以至于 $I$ 与 $\bigcup_{n=1}^{N}I_n$ 不交. 容易

看出：$I$ 必与 $\{I_n\}_{n\in\mathbf{N}}$中至少一个区间相交. 倘不然，对于每个自然数 $n$，$I$ 与 $\bigcup_{k=1}^{n} I_k$不交，则必有

$$|I|\leqslant a_{n+1}<2|I_{n+1}|.$$

因$\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|<\infty$，当然$\lim_{n\to\infty}|I_n|=0$，由此导致$|I|=0$，而这是不可能的. 现在设 $n$ 是使 $I$ 与 $I_n$相交的最小下标，则 $n>N$ 且$|I|\leqslant a_n<2|I_n|$. 因 $x\in I$ 且 $I$ 与 $I_n$ 相交，故 $x$ 到 $I_n$ 的中点的距离至多为$|I|+\frac{1}{2}|I_n|<\frac{5}{2}|I_n|$. 如此，$x\in J_n$. 这里，$J_n$ 表示一个区间，它的中点与 $I_n$ 的中点重合，而长度是 $I_n$ 的 5 倍. 这就证明了：$T\subset \bigcup_{n=N+1}^{\infty} J_n$. 因而，$m^*T\leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty}|J_n|=5\sum_{n=N+1}^{\infty}|I_n|<\varepsilon$.

为了深入讨论函数 $f$ 的可微性，我们引入下述四个量.

**定义 6.1.2** $f$ 在 $x$ 处的上右导数、下右导数、上左导数、下左导数（总称为 Dini 导数）分别定义为：

$$D^+f(x)=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

$$D_+f(x)=\underline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

$$D^-f(x)=\overline{\lim_{h\to 0^-}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

$$D_-f(x)=\underline{\lim_{h\to 0^-}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

显然，$D^+f(x)\geqslant D_+f(x)$，$D^-f(x)\geqslant D_-f(x)$.

若 $D^+f(x)=D_+f(x)$为有限值，则称 $f$ 在 $x$ 处具有右导数 $f'_+(x)$，其值定义为 $D^+f(x)$与 $D_+f(x)$的公共值；若 $D^-f(x)=D_-f(x)$为有限值，则称 $f$ 在 $x$ 处具有左导数 $f'_-(x)$，其值定义为 $D^-f(x)$与 $D_-f(x)$的公共值. 若 $D^+f(x)=D_+f(x)=D^-f(x)=D_-f(x)$为有限值，即 $f'_+(x)$与 $f'_-(x)$存在且相等，则称 $f$ 在 $x$ 处可导（或可微），其导数即为 $f'_+(x)$与 $f'_-(x)$的公共值，记作 $f'(x)$.

**定理 6.1.2（Lebesgue）** 设 $f$ 为定义于$[a,b]$上的单调增加实值函数，则 $f$ 在$[a,b]$上几乎处处可微，导函数 $f'(x)$为可测的，且 $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\leqslant f(b)-f(a)$.

**证** 分三步来证明.

第一步证：$E=\{x\in[a,b]:D^+f(x)>D_-f(x)\}$为零测度集. 首先，由 $f$ 为单调增加，知 $D^+f(x)\geqslant 0, D_-f(x)\geqslant 0$. 以 $Q^+$ 记正有理数集合，则 $E=\bigcup\limits_{u,v\in Q^+}E_{u,v}$，这里的 $E_{u,v}$ 记集合 $\{x\in[a,b]:D^+f(x)>u>v>D_-f(x)\}$. 令 $s=m^*E_{u,v}$，则对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在开集 $G\supset E_{u,v}$，使 $mG<s+\varepsilon$. 对于每个 $x\in E_{u,v}\subset G$，存在 $h>0$，使 $I_{x,h}:=[x-h,x]\subset G$ 且 $f(x)-f(x-h)<vh$. 易见，满足这样条件的 $h>0$ 可取得足够小. 故所有这样的区间 $I_{x,h}$ 构成了 $E_{u,v}$ 的 Vitali 覆盖. 由 Vitali 引理，知在上述区间族 $\{I_{x,h}\}$ 中存在有限个互不相交的区间 $I_1, I_2, \cdots, I_N$，使

$$m^*(E_{u,v}\setminus\bigcup_{n=1}^{N}I_n)<\varepsilon.$$

因而，

$$m^*(E_{u,v}\cap(\bigcup_{n=1}^{N}I_n^\circ))>s-\varepsilon.$$

这里，我们假定 $I_n=[x_n-h_n,x_n]$，$I_n^\circ=(x_n-h_n,x_n)$，$1\leqslant n\leqslant N$. 由此，

$$\sum_{n=1}^{N}[f(x_n)-f(x_n-h_n)]<v\sum_{n=1}^{N}h_n<v(mG)<v(s+\varepsilon). \qquad (6.5)$$

对于每个 $y\in E_{u,v}\cap(\bigcup\limits_{n=1}^{N}I_n^\circ)$，存在 $k>0$，使 $J_{y,k}=[y,y+k]$ 含于某 $I_n^\circ=(x_n-h_n,x_n)$ 内，且 $\dfrac{f(y+k)-f(y)}{k}>u$. 如上面所述的 $h$，在这里 $k>0$ 可取得足够小. 再由 Vitali 引理，知在区间族 $\{J_{y,k}\}$ 中，存在有限个互不相交的区间 $J_1, J_2\cdots, J_M$，使

$$\sum_{m=1}^{M}k_m>m^*(E_{u,v}\cap(\bigcup_{n=1}^{N}I_n^\circ))-\varepsilon>s-2\varepsilon;$$

而且，$\sum\limits_{m=1}^{M}(f(y_m+k_m)-f(y_m))>u(\sum\limits_{m=1}^{M}k_m)>u(s-2\varepsilon)$. (6.6)

注意：每个 $J_m$ 含于某 $I_n$ 中. 若取定 $n$，$1\leqslant n\leqslant N$，对所有使 $J_m\subset I_n$ 的 $m$ 取和，并考虑到 $\{J_m:m=1,2,\cdots,M\}$ 是互不相交的以及 $f$ 是单调增加的，我们有：

$$\sum_{m}[f(y_m+k_m)-f(y_m)]\leqslant f(x_n)-f(x_n-h_n).$$

由此知：

$$\sum_{m=1}^{M}[f(y_m+k_m)-f(y_m)]\leqslant\sum_{n=1}^{N}[f(x_n)-f(x_n-h_n)].$$

上式结合(6.5)式、(6.6)式有：$u(s-2\varepsilon)<v(s+\varepsilon)$. 因 $\varepsilon>0$ 可任意小，故 $us\leqslant vs$. 但 $u>v$，故必 $s=0$，即 $m^*(E_{u,v})=0$. 由此可知：$m^*(E)=0$.

第二步证:在$[a,b]$上几乎处处有 $D^+ f(x)=D_+ f(x)=D^- f(x)=D_- f(x)$. 令 $g(x)=-f(-x)$,则 $g$ 是定义于$[-b,-a]$上的单调增加函数. 由第一步所证知:对于几乎所有的 $x\in[a,b]$,有 $D^+ g(-x)\leqslant D_- g(-x)$. 易验证:$D^+ g(-x)=D^- f(x)$ 及 $D_- g(-x)=D_+ f(x)$. 故对于几乎所有的 $x\in[a,b]$,有 $D^- f(x)\leqslant D_+ f(x)$. 由第一步知:对于几乎所有的 $x$,有 $D^+ f(x)\leqslant D_- f(x)$. 注意到:$D_- f(x)\leqslant D^- f(x)$和$D_+ f(x)\leqslant D^+ f(x)$ 总是成立的. 结合上述结果,我们知道,几乎处处有

$$D^+ f(x)\leqslant D_- f(x)\leqslant D^- f(x)\leqslant D_+ f(x)\leqslant D^+ f(x).$$

因而,$f$ 在$[a,b]$上几乎处处可微.

第三步证:$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\leqslant f(b)-f(a)$. 将 $f$ 按如下方式开拓为$[a,+\infty]$上的单调增加函数:当 $x>b$ 时,定义 $f(x)=f(b)$. 由第二步所证知 $f'(x)$几乎处处存在. 对于每个自然数 $n$,定义 $g_n(x)=\dfrac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{\frac{1}{n}}$,则 $g_n$ 为非负可测且几乎处处收敛于 $f'(x)$. 由 Fatou 引理,有 $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \varliminf_{n\to\infty} g_n(x)\mathrm{d}x\leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x$. 但

$$\begin{aligned}
\int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x &= n\int_a^b\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]\mathrm{d}x,\\
&= n\left[\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]\\
&= n\left[\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x-\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x\right]\\
&= f(b)-n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x\\
&\leqslant f(b)-n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(a)\mathrm{d}x\\
&= f(b)-f(a).
\end{aligned}$$

故 $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\leqslant f(b)-f(a)$.

**注 6.1** 即使 $f$ 是$[a,b]$上连续的单调增加函数,仍有可能使定理 6.1.2 中的

不等号是严格的,即:$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x < f(b) - f(a)$.

**例 6.1.1** 一个$[0,1]$上的单调增加函数使定理 6.1.2 中的不等号是严格的.设 $P_0$ 是 Cantor 完备集,$G_0=[0,1]\setminus P_0$ 是 $P_0$ 的余区间集.对于 $P_0$ 的余区间集作如下分类:

第 1 类由 1 个区间$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$组成;

第 2 类由 2 个区间$\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$,$\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$组成;

第 3 类由 4 个区间$\left(\frac{1}{27},\frac{2}{27}\right)$,$\left(\frac{7}{27},\frac{8}{27}\right)$,$\left(\frac{19}{27},\frac{20}{27}\right)$,$\left(\frac{25}{27},\frac{26}{27}\right)$组成……

依次类推,一般地第 $n$ 类由 $2^{n-1}$个区间组成.今作定义于 $G_0$ 上的函数 $f$ 如下:

在第 1 类的 1 个区间上,即当 $x\in\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ 时,$f(x)=\frac{1}{2}$;

在第 2 类的 2 个区间上,当 $x\in\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$ 时,$f(x)=\frac{1}{4}$;当 $x\in\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$时,$f(x)=\frac{3}{4}$;

在第 3 类的 4 个区间上,$f(x)$ 依次取$\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{5}{8},\frac{7}{8}$.

一般地,在第 $n$ 类的 $2^{n-1}$个区间上,$f(x)$依次取$\frac{1}{2^n},\frac{3}{2^n},\frac{5}{2^n},\cdots,\frac{2^n-1}{2^n}$.

这样,$f$ 在 $G_0$ 的每个构成区间上取常数值,并且总的说来,$f$ 在 $G_0$ 上是一个单调增加函数.在 $P_0$ 上补充 $f(x)$的定义如下:$f(0)=0$,$f(1)=1$,并且当 $x_0\in P_0$ 且 $0<x_0<1$ 时,定义 $f(x_0)=\sup\{f(x):x\in G_0,x<x_0\}$.易见,$f(x)$是在整个闭区间$[0,1]$上有定义的单调增加函数.我们还可以证明:$f$ 在整个$[0,1]$上连续.显然,$f$ 在 $G_0$ 上所取函数值的集合$\{f(x):x\in G_0\}$已稠密于$[0,1]$.若 $x_0\in[0,1]$使 $f$ 在 $x_0$ 处不连续,则区间$(f(x_0-0),f(x_0))$或$(f(x_0),f(x_0+0))$不交 $\{f(x):x\in[0,1]\}$.这表明 $\{f(x):x\in[0,1]\}$ 不稠密于$[0,1]$,矛盾!这样,我们就证明了 $f$ 是定义于$[0,1]$上的单调增加连续函数.此外,在 $G_0$ 中每一点 $x$,$f'(x)=0$.故 $f'(x)$几乎处处为 0.现在容易看到:$\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = 0 < 1 = f(1) - f(0)$.

## 6.2 有界变差函数

首先约定，对于任意实数 $r$，$r^+=\max(r,0)$，$r^-=\max(-r,0)$. 易见，$|r|=r^++r$ 及 $r=r^+-r^-$. 设 $f$ 为定义于区间$[a,b]$上的实值函数. $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 称为$[a,b]$的一个分割，记作 $\tau$. 对应于 $f$ 及上述分割 $\tau$，我们可作出下述量：

$$P_\tau(f)=\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]^+,$$

$$N_\tau(f)=\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]^-,$$

$$T_\tau(f)=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|.$$

显然，$T_\tau(f)=P_\tau(f)+N_\tau(f)$. 令：

$$P_a^b(f)=\sup\{P_\tau(f):\tau\text{ 为}[a,b]\text{的分割}\},$$

$$N_a^b(f)=\sup\{N_\tau(f):\tau\text{ 为}[a,b]\text{的分割}\},$$

$$T_a^b(f)=\sup\{T_\tau(f):\tau\text{ 为}[a,b]\text{的分割}\}.$$

容易看到：$\max(P_a^b(f),N_a^b(f))\leqslant T_a^b(f)\leqslant P_a^b(f)+N_a^b(f)$.

**定义 6.2.1** 分别称 $P_a^b(f)$，$N_a^b(f)$，$T_a^b(f)$为 $f$ 在$[a,b]$上的正变差、负变差和全变差. 若 $T_a^b(f)<\infty$，则称 $f$ 是$[a,b]$上的**有界变差函数**，记作 $f\in BV[a,b]$.

**例 6.2.1** 单调函数是有界变差的.

**证** 记 $f(x)$为$[a,b]$上的单调函数，则对于$[a,b]$的任一分割 $\tau$，有 $T_\tau(f)=|f(b)-f(a)|$. 由此知：$T_a^b(f)=|f(b)-f(a)|<\infty$.

容易看到：对于$[a,b]$上两个实值函数 $f,g$ 及常数 $c$ 有

$$T_a^b(f+g)\leqslant T_a^b(f)+T_a^b(g),\ T_a^b(cf)=|c|T_a^b(f).$$

由此可知：$BV[a,b]$是一个线性空间.

**命题 6.2.1** 若 $f\in BV[a,b]$，则 $f$ 必在$[a,b]$上有界.

**证** 对于任意 $x\in[a,b]$，显然 $|f(x)-f(a)|\leqslant T_a^b(f)<\infty$. 故 $|f(x)|\leqslant|f(a)|+|f(x)-f(a)|\leqslant|f(a)|+T_a^b(f)<\infty$.

**引理 6.2.2** 对于任意 $c\in[a,b]$，有 $T_a^b(f)=T_a^c(f)+T_c^b(f)$.

**证** 任取$[a,c]$的分割 $\tau_1$ 及$[c,b]$的分割 $\tau_2$. 将 $\tau_1$ 和 $\tau_2$ 的分点合在一起可构成$[a,b]$的一个分割 $\tau$. 显然，有 $T_{\tau_1}(f)+T_{\tau_2}(f)=T_\tau(f)\leqslant T_a^b(f)$. 从而得

$$T_a^c(f)+T_c^b(f)\leqslant T_a^b(f). \tag{6.7}$$

另一方面，任取$[a,b]$的一个分割$\tau$. 由于分割与决定该分割的分点$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$是1—1对应的，故我们也可将分割$\tau$看成是由分点构成的集合. 按照这样的理解，$\tau\cup\{c\}=\tau'$仍为$[a,b]$的一个分割，并且$T_\tau(f)\leqslant T_{\tau'}(f)$. 令$\tau_1=\{x\in\tau':x\leqslant c\}$，$\tau_2=\{x\in\tau':x\geqslant c\}$，则$\tau_1$和$\tau_2$分别是$[a,c]$和$[c,b]$的分割. 这时有

$$T_\tau(f)\leqslant T_{\tau'}(f)=T_{\tau_1}(f)+T_{\tau_2}(f)\leqslant T_a^c(f)+T_c^b(f).$$

从而得$T_a^b(f)\leqslant T_a^c(f)+T_c^b(f)$. 上式结合(6.7)式有：$T_a^b(f)=T_a^c(f)+T_c^b(f)$.

**引理 6.2.3** 若$f\in BV[a,b]$，则$T_a^b(f)=P_a^b(f)+N_a^b(f)$且$f(b)-f(a)=P_a^b(f)-N_a^b(f)$.

**证** 对于$[a,b]$的任一分割$\tau:x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，有

$$\begin{aligned}P_\tau(f)-N_\tau(f)&=\sum_{i=1}^{n}[(f(x_i)-f(x_{i-1}))^+-(f(x_i)-f(x_{i-1}))^-]\\&=\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))=f(b)-f(a).\end{aligned}$$

故$N_\tau(f)+f(b)-f(a)=P_\tau(f)\leqslant P_a^b(f)$. 由此知

$$N_a^b(f)+f(b)-f(a)\leqslant P_a^b(f). \tag{6.8}$$

对于任意$\varepsilon>0$，存在$[a,b]$的一个分割$\tau'$，使$P_a^b(f)-\varepsilon<P_{\tau'}(f)$，即$P_a^b(f)-\varepsilon<N_{\tau'}(f)+f(b)-f(a)$. 由此又有$P_a^b(f)-\varepsilon<N_a^b(f)+f(b)-f(a)$. 故

$$P_a^b(f)\leqslant N_a^b(f)+f(b)-f(a). \tag{6.9}$$

结合(6.8)、(6.9)式有：$P_a^b(f)=N_a^b(f)+f(b)-f(a)$，即$f(b)-f(a)=P_a^b(f)-N_a^b(f)$. 又，对于$[a,b]$的任一分割$\tau$，有：

$$T_\tau(f)=P_\tau(f)+N_\tau(f)=2P_\tau(f)-[f(b)-f(a)].$$

由此容易证明：$T_a^b(f)=2P_a^b(f)-[f(b)-f(a)]=P_a^b(f)+N_a^b(f)$.

**定理 6.2.4** 定义于$[a,b]$上的实值函数$f$为有界变差的充分必要条件是：$f$为两个单调增加函数之差.

**证** 充分性. 设$f=g-h$，这里，$g,h$为$[a,b]$上两个单调增加的实值函数. 对于$[a,b]$的任一分割$\tau:x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，我们有$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\leqslant\sum_{i=1}^{n}[g(x_i)-g(x_{i-1})]+\sum_{i=1}^{n}[h(x_i)-h(x_{i-1})]=g(b)-g(a)+h(b)-h(a)$. 由此可知，$T_a^b(f)\leqslant g(b)-g(a)+h(b)-h(a)<\infty$.

必要性. 设 $f$ 为有界变差函数. 令 $g(x)=P_a^x(f)$, $h(x)=N_a^x(f)$. 由引理 6.2.2 和引理 6.2.3 知: $0\leqslant g(x)\leqslant T_a^x(f)\leqslant T_a^b(f)<\infty$, $0\leqslant h(x)\leqslant T_a^x(f)\leqslant T_a^b(f)<\infty$, 且易见 $g(x)$ 和 $h(x)$ 为 $[a,b]$ 上单调增加的实值函数. 再由引理 6.2.3, 知 $f(x)-f(a)=P_a^x(f)-N_a^x(f)=g(x)-h(x)$, 即 $f(x)=g(x)-(h(x)-f(a))$. 今 $g(x)$, $h(x)-f(a)$ 为单调增加的实值函数; 又, $f$ 已表示为它们的差, 故必要性证毕.

**推论 6.2.5**　若 $f$ 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数, 则 $f$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处可微, $f'\in L[a,b]$ 且 $\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant T_a^b(f)$.

**证**　由定理 6.2.4 和定理 6.1.2 可知 $f$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处可微且 $f'\in L[a,b]$. 又, 由定理 6.2.4 的证明知 $f(x)=g(x)-(h(x)-f(a))$, 这里, $g(x)=P_a^x(f)$, $h(x)=N_a^x(f)$. 故 $f'(x)=g'(x)-h'(x)$. 注意, $g'(x)$, $h'(x)$ 非负, 并应用定理 6.1.2 和引理 6.2.3, 有:

$$\begin{aligned}\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x &= \int_a^b |g'(x)-h'(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g'(x)\mathrm{d}x+\int_a^b h'(x)\mathrm{d}x\\ &\leqslant g(b)-g(a)+h(b)-h(a)=P_a^b(f)+N_a^b(f)\\ &=T_a^b(f).\end{aligned}$$

我们已见到有界变差函数为几乎处处可微的, 但是在闭区间 $[a,b]$ 上处处可微的函数未必为有界变差的.

**例 6.2.2**　一个在有界闭区间上处处可微但不是有界变差的函数.

设 $f(x)=x^2\cos\dfrac{\pi}{2x^2}$, 当 $0<x\leqslant 1$ 时; $f(x)=0$, 当 $x=0$ 时.

易见, $f$ 不但在 $[0,1]$ 上连续, 而且在 $[0,1]$ 上处处可微(在区间端点, 按单侧可微定义). 对于每个自然数 $n$, 作 $[0,1]$ 的一个分割 $\tau_n$:

$$x_0=0<\frac{1}{\sqrt{2n}}<\frac{1}{\sqrt{2n-1}}<\cdots<\frac{1}{\sqrt{3}}<\frac{1}{\sqrt{2}}<1=x_n.$$

对应于此分割 $\tau_n$, 我们有变差:

$$\begin{aligned}T_{\tau_n}(f)=&\left|f\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)-f(0)\right|+\left|f\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right)-f\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\right|+\cdots\\ &+\left|f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right|+\left|f(1)-f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{2}+1.$$

由此可知：$T_a^b(f)=\infty$. 即 $f$ 不是有界变差的.

**例 6.2.3**　设 $f$ 是定义于$[a,b]$上的可微函数且对于任意 $x\in[a,b]$，$|f'(x)|\leqslant L$（$L$ 为常数），则 $f$ 必为有界变差的.

**证**　任作$[a,b]$的分割 $\tau$：$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$. 由微分中值定理，知对于每个 $i=1,2,\cdots,n$，有 $\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$ 使 $f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$. 如此有，

$$T_\tau(f)=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=\sum_{i=1}^{n}|f'(\xi_i)|(x_i-x_{i-1})\leqslant L\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=L(b-a).$$

由此可知：$T_a^b(f)\leqslant L(b-a)<\infty$.

## 6.3　不定积分的微分

设 $f\in L[a,b]$，如同在数学分析中一样，利用变上限的定积分（所不同的是这里是指 Lebesgue 积分）可以定义$[a,b]$上的一个新函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，$x\in[a,b]$. 称 $F$ 为 $f$ 的不定积分. 自然地，我们要问：是否仍有 $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)$？由于几乎处处相等的两个函数，其 Lebesgue 积分总是相等的，故问题的正确提法应是：$F'(x)=f(x)$是否几乎处处成立？我们的回答是肯定的. 我们将给出本章一开始所提及的结论 I′的证明.

**引理 6.3.1**　设 $f\in L[a,b]$，则 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是$[a,b]$上连续的有界变差函数，且 $T_a^b(F)=\int_a^b|f(t)|\mathrm{d}t$.

**证**　$F(x)$的连续性可由 Lebesgue 积分的绝对连续性推得. 设 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 是$[a,b]$的任一个分割，则

$$\sum_{i=1}^{n}|F(x_i)-F(x_{i-1})|=\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(t)|\mathrm{d}t=\int_a^b|f(t)|\mathrm{d}t.$$

由此可知，

$$T_a^b(F)\leqslant\int_a^b|f(t)|\mathrm{d}t<\infty. \tag{6.10}$$

故 $F$ 为有界变差的.

以下我们证：$T_a^b(F)=\int_a^b|f(t)|\mathrm{d}t$. 由于已有(6.10)式，故我们只需证明：

$$\int_a^b|f(t)|\mathrm{d}t\leqslant T_a^b(F). \tag{6.11}$$

先设 $f$ 为$[a,b]$上的连续函数. 这时 $G_1=(f>0)\cap(a,b)$，$G_2=(f<0)\cap(a,b)$ 为两个开集. 设$\{(a_n,b_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$和$\{(c_n,d_n)\}_{n\in\mathbf{N}}$分别是 $G_1$ 和 $G_2$ 的构成区间. 由积分的可数可加性知：

$$\int_a^b|f(t)|\mathrm{d}t=\int_{G_1}f(t)\mathrm{d}t+\int_{G_2}[-f(t)]\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{b_n}f(t)\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{c_n}^{d_n}[-f(t)]\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{n\to\infty}\Big[\sum_{i=1}^{n}|F(b_i)-F(a_i)|+\sum_{i=1}^{n}|F(d_i)-F(c_i)|\Big]\leqslant T_a^b(F).$$

即，当 $f$ 连续时，(6.11)式成立.

对于一般可积函数 $f$，任取 $\varepsilon>0$，则存在连续函数 $g$ 使

$$\int_a^b|f(t)-g(t)|\mathrm{d}t<\varepsilon. \tag{6.12}$$

令 $h=f-g$，并设 $H(x)=\int_a^x h(t)\mathrm{d}t$，$G(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$，则 $F(x)=G(x)+H(x)$，$x\in[a,b]$. 利用(6.10)式、(6.12)式及已证明的(6.11)式对于连续函数成立的结论，我们有：

$$\int_a^b|f(t)|\mathrm{d}t-\varepsilon<\int_a^b|g(t)|\mathrm{d}t=T_a^b(G)\leqslant T_a^b(F)+T_a^b(H)\leqslant T_a^b(F)+$$

$$\int_a^b|h(t)|\mathrm{d}t<T_a^b(F)+\varepsilon.$$

因 $\varepsilon>0$ 可任意小，故 $\int_a^b|f(t)|\mathrm{d}t\leqslant T_a^b(F)$.

由于有界变差函数是几乎处处可微的，故我们有下述推论：

**推论 6.3.2** 设 $f\in L[a,b]$，则 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$[a,b]$上几乎处处可微.

**引理 6.3.3** 设 $g\in L[a,b]$，$G(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$，$x\in[a,b]$，则

$$\int_a^b|G'(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b|g(t)|\mathrm{d}t.$$

**证** 令 $G_1(x)=\int_a^x g^+\mathrm{d}t$，$G_2(x)=\int_a^x g^-\mathrm{d}t$，则 $G_1(x)$，$G_2(x)$均为$[a,b]$上的单调增加函数. 由定理 6.1.2 知：

$$\int_a^b G_1'(x)\mathrm{d}x \leqslant G_1(b)-G_1(a), \int_a^b G_2'(x)\mathrm{d}x \leqslant G_2(b)-G_2(a).$$

易见,在$[a,b]$上几乎处处有:

$$|G'(x)|=|G'_1(x)-G'_2(x)|\leqslant|G'_1(x)|+|G'_2(x)|=G'_1(x)+G'_2(x).$$

故:

$$\begin{aligned}\int_a^b |G'(x)|\mathrm{d}x &\leqslant \int_a^b G_1'(x)\mathrm{d}x+\int_a^b G_2'(x)\mathrm{d}x\\ &\leqslant G_1(b)-G_1(a)+G_2(b)-G_2(a)\\ &=\int_a^b g^+\,\mathrm{d}t+\int_a^b g^-\,\mathrm{d}t\\ &=\int_a^b |g|\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

**定理 6.3.4** 设$f\in L[a,b]$,$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,则几乎处处有:$F'(x)=f(x)$.

**证** 对于任意$\varepsilon>0$,存在连续函数$h$,使$\int_a^b |f-h|\mathrm{d}x<\varepsilon$(见定理5.5.2).令$H(x)=\int_a^x h(t)\mathrm{d}t$,则由数学分析知:$H'(x)=h(x)$,$x\in[a,b]$.在引理 6.3.3 中,令$G(x)=F(x)-H(x)$,则我们有:

$$\begin{aligned}\int_a^b |F'-f|\mathrm{d}x &\leqslant \int_a^b |F'-H'|\mathrm{d}x+\int_a^b |h-f|\mathrm{d}x\\ &=\int_a^b |(F-H)'|\mathrm{d}x+\int_a^b |f-h|\mathrm{d}x\\ &\leqslant\int_a^b |f-h|\mathrm{d}x+\int_a^b |f-h|\mathrm{d}x\\ &<2\varepsilon.\end{aligned}$$

因$\varepsilon>0$可任意小,故$\int_a^b |F'-f|\mathrm{d}x=0$.由此知几乎处处有:$F'(x)=f(x)$.

**例 6.3.1** 设$f\in L[a,b]$.若对于任意$c\in[a,b]$,有$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x=0$,则几乎处处有:$f(x)=0$.

**证** 令$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.由假设条件知$F(x)\equiv0$,故$F'(x)\equiv0$.由定理6.3.4 知:在$[a,b]$上几乎处处有$F'(x)=f(x)$.即$f(x)=0$几乎处处成立.

## 6.4 绝对连续函数

在数学分析中,我们知道:若定义于$[a,b]$上的实值函数 $f(x)$ 使 $f'(x)$处处存在,且 $f'\in C[a,b]$,则有 $f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b]$. 这个结果常称为 Newton—Leibniz 公式,也称为微积分基本定理. 本节我们要在 Lebesgue 积分的框架下来推广这一基本结果. 即我们要找出这样一类实值函数 $f(x)$,它具有如下性质:$f'(x)$几乎处处存在,$f'\in L[a,b]$且 $f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b]$.

首先,由引理 6.3.1,我们注意到这样的函数 $f$ 必是$[a,b]$上连续的有界变差函数. 但是,由例 6.1.1 又知存在$[a,b]$上连续的单调增加函数 $f$(当然是有界变差函数),使$\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t<f(b)-f(a)$. 由此可见,我们要找的函数类必是连续有界变差函数类的真子类.

其次,如果实值函数 $f(x)$具有所要求的性质,即 $f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$ ,$x\in[a,b]$,这里,$f'\in L[a,b]$. 由积分的绝对连续性,知对于任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使对于$[a,b]$的任何可测子集 $e$,只要 $m(e)<\delta$,就有$\int_e |f'(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$. 特别地,对于$[a,b]$中有限个互不相交的开区间$(a_i,b_i)$,$i=1,2,\cdots,n$,只要$\sum_{i=1}^n(b_i-a_i)<\delta$,便有

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i)-f(a_i)|=\sum_{i=1}^n\left|\int_{a_i}^{b_i}f'(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\sum_{i=1}^n\int_{a_i}^{b_i}|f'(x)|\mathrm{d}x=$$

$$\int_{\bigcup_{i=1}^n(a_i,b_i)}|f'(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

这一观察结果使我们引入下述定义:

**定义 6.4.1** 设 $f(x)$是$[a,b]$上的实值函数. 若对于任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使当$[a,b]$中任意有限个互不相交的开区间$(a_i,b_i)$($i=1,2,\cdots,n$)满足$\sum_{i=1}^n(b_i-a_i)<\delta$时,必有$\sum_{i=1}^n|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon$,则称 $f(x)$是$[a,b]$上的**绝对连续函数**.

本节我们将证明绝对连续函数类就是我们所要找的在 Lebesgue 积分意义下使 Newton—Leibniz 公式成立的最大函数类. 容易验证:若 $f,g$ 为$[a,b]$上的绝对连续函数,$c$ 为实常数,则 $f+g$ 和 $cf$ 也为$[a,b]$上的绝对连续函数. 显然,绝对连

续函数必为连续函数. 此外,我们还有:

**引理 6.4.1** 若 $f$ 为$[a,b]$上的绝对连续函数,则 $f$ 必为有界变差的.

**证** 在绝对连续函数的定义中取 $\varepsilon=1$,则存在 $\delta>0$,使当$[a,b]$中任何有限个互不相交的开区间$(a_i,b_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 满足$\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$时,必有

$$\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|<1.$$

今设 $\tau: x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_N=b$ 是$[a,b]$的一个分割,满足 $x_i-x_{i-1}<\delta$,$1\leqslant i\leqslant N$. 则对于每个 $i$,有 $T_{x_{i-1}}^{x_i}(f)\leqslant 1$. 因而由引理 6.2.2,知 $T_a^b(f)=\sum\limits_{i=1}^{N}T_{x_{i-1}}^{x_i}(f)\leqslant N$. 故 $f$ 是有界变差的.

**推论 6.4.2** 若 $f(x)$为$[a,b]$上的绝对连续函数,则 $f'(x)$在$[a,b]$上几乎处处存在且 $f'\in L[a,b]$.

**证** 由引理 6.4.1 及推论 6.2.5 可立得.

下述引理可由积分的绝对连续性直接推出.

**引理 6.4.3** 若 $f\in L[a,b]$,$F(x)$ 定义为$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ ,$x\in[a,b]$,则 $F$ 是$[a,b]$上的绝对连续函数.

**引理 6.4.4** 设 $f(x)$为$[a,b]$上的绝对连续函数且 $f'(x)=0$ 几乎处处成立. 则 $f(x)$为常数.

**证** 对于任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使对于$[a,b]$中任意有限个互不相交的开区间$(a_i,b_i)(i=1,2,\cdots,n)$,只要$\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$,就有$\sum\limits_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon$. 令 $E=\{x\in(a,b): f'(x)=0\}$,则由假设有 $mE=b-a$. 令 $\Gamma=\{[x,x+h]\subset(a,b): x\in E, h>0$ 使$|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon h\}$. 显然区间族 $\Gamma$ 按 Vitali 意义覆盖 $E$. 由 Vitali 引理(即引理 6.1.1)知:$\Gamma$ 中存在有限个互不相交的区间 $I_i=[x_i,x_i+h_i](1\leqslant i\leqslant n)$,使 $m([a,b]\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{n}I_i)=m(E\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{n}I_i)<\delta$. 不妨设

$$a<x_1<x_1+h_1<x_2<\cdots<x_n<x_n+h_n<b.$$

于是下列有限个区间:$(a,x_1)$,$(x_1+h_1,x_2)$,$(x_2+h_2,h_3)$,$\cdots$,$(x_n+h_n,b)$的长度总和小于 $\delta$. 故$|f(x_1)-f(a)|+|f(x_2)-f(x_1+h_1)|+\cdots+|f(b)-f(x_n+h_n)|<\varepsilon$. (6.13)

另一方面,由 $\Gamma$ 的定义知:

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i+h_i)-f(x_i)|<\varepsilon\sum_{i=1}^{n}h_i\leqslant\varepsilon(b-a). \tag{6.14}$$

利用关于绝对值的三角不等式及(6.13)和(6.14)式，有 $|f(b)-f(a)|<\varepsilon+\varepsilon(b-a)$. 由 $\varepsilon$ 的任意性，知 $f(b)=f(a)$. 将 $b$ 代之以 $x\in[a,b]$，并注意到在$[a,b]$上绝对连续的函数在$[a,x]$上也为绝对连续的，按上述推论我们又有 $f(x)=f(a)$，即 $f(x)$为常数.

**注 6.2** 由上述引理可知例 6.1.1 中的函数不是绝对连续的.

**定理 6.4.5** 设 $f(x)$为定义于$[a,b]$上的实值函数，则 $f(x)$为绝对连续函数当且仅当：$f'(x)$几乎处处存在，$f'\in L[a,b]$且 $f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b]$.

**证** (1) 若$[a,b]$上的实值函数 $f(x)$使 $f'(x)$几乎处处存在，$f'\in L[a,b]$且 $f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b]$，则由引理 6.4.3，知 $f(x)$是$[a,b]$上的绝对连续函数.

(2) 反之，设 $f(x)$是$[a,b]$上的绝对连续函数. 则由推论 6.4.2，知 $f'(x)$在$[a,b]$上几乎处处存在且 $f'\in L[a,b]$. 令 $g(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$ ，$x\in[a,b]$，则由引理 6.4.3，知 $g(x)$是$[a,b]$上的绝对连续函数，且由不定积分的求导公式(即定理 6.3.4)有：$g'(x)=f'(x)$几乎处处成立. 注意到 $f(x)-g(x)$也为$[a,b]$上的绝对连续函数，且$[f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x)=f'(x)-f'(x)=0$ 几乎处处成立. 由引理 6.4.4，知 $f(x)-g(x)$为常数. 故 $f(x)-g(x)=f(a)-g(a)=f(a)-f(a)=0, x\in[a,b]$. 由此可知：$f(x)=g(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b]$.

至此，我们已完成了本章开始时所指出的基本结论Ⅱ′的证明.

**例 6.4.1** 设 $f$ 在$[a,b]$上绝对连续，且 $f'(x)\geqslant 0$, $a.e.$ 于$[a,b]$，则 $f(x)$为$[a,b]$上的增函数.

**证** 任取 $x_1,x_2\in[a,b]$，$x_1<x_2$. 因为 $f$ 在$[a,b]$上为绝对连续的，由定理 6.4.5，有

$$f(x_2)-f(x_1)=\left(f(a)+\int_a^{x_2}f'(t)\mathrm{d}t\right)-\left(f(a)+\int_a^{x_1}f'(t)\mathrm{d}t\right)=\int_{x_1}^{x_2}f'(t)\mathrm{d}t.$$

因 $f'(x)\geqslant 0$, $a.e.$ 于$[a,b]$，故 $\int_{x_1}^{x_2}f'(t)\mathrm{d}t\geqslant 0$ ，如此有 $f(x_2)\geqslant f(x_1)$.

## 6.5 例题选讲

**例 6.5.1** 设函数 $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ 为单调增加函数,满足 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$ 且为次可加的,即对于任意 $x,y\in(0,\infty)$,有 $f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$,则 $f$ 在 $(0,\infty)$ 上处处连续.

**证** 任取 $x_0\in(0,\infty)$,对于 $\Delta x>0$,有

$$f(x_0)\leqslant f(x_0+\Delta x)\leqslant f(x_0)+f(\Delta x).$$

当 $\Delta x\to 0^+$ 时,$f(\Delta x)\to 0$. 故 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$.

又,对于 $\Delta x>0$ 且使 $x_0-\Delta x\in(0,\infty)$ 者,有

$$f(x_0)-f(\Delta x)\leqslant f(x_0-\Delta x)\leqslant f(x_0).$$

当 $\Delta x\to 0$ 时,$f(\Delta x)\to 0$. 故 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}f(x_0-\Delta x)=f(x_0)$. 综上所述,知:$\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$,即 $f$ 在 $x_0$ 处连续. 由 $x_0$ 的任意性,知 $f$ 在 $(0,\infty)$ 上处处连续.

**例 6.5.2** 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的单调增加函数,其值域 $\{f(x):x\in[a,b]\}$ 稠密于 $[f(a),f(b)]$,则 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数.

**证** 若 $f(x)$ 在 $x_0$ 处不连续,则有 $f(x_0-0)<f(x_0+0)$(当 $x_0=a$ 时,取 $f(x_0-0)$ 为 $f(a)$;当 $x_0=b$ 时,取 $f(x_0+0)$ 为 $f(b)$). 由 $f(x)$ 为单调增加,知 $f(x)$ 不取开区间 $(f(x_0-0),f(x_0+0))$ 中的任何值. 又,$(f(x_0-0),f(x_0+0))\subset[f(a),f(b)]$ 为非空开集,此矛盾于假设 $\{f(x):x\in[a,b]\}$ 稠密于 $[f(a),f(b)]$.

**例 6.5.3** $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 为有界变差的充分必要条件是存在单调增加函数 $\varphi(x)$,使当 $x_1,x_2\in[a,b]$,$x_2>x_1$ 时,有 $f(x_2)-f(x_1)\leqslant\varphi(x_2)-\varphi(x_1)$.

**证** 若 $f(x)$ 为有界变差的,则对于任意 $x_2>x_1$,有 $f(x_2)-f(x_1)\leqslant T_{x_1}^{x_2}(f)=T_a^{x_2}(f)-T_a^{x_1}(f)$. 令 $\varphi(x)=T_a^x(f)$,则 $\varphi(x)$ 为单调增加的,且 $f(x_2)-f(x_1)\leqslant\varphi(x_2)-\varphi(x_1)$.

反之,若存在单调增加函数 $\varphi(x)$,使对于任意 $x_2>x_1$,有 $f(x_2)-f(x_1)\leqslant\varphi(x_2)-\varphi(x_1)$. 令 $\Psi(x)=\varphi(x)-f(x)$,则当 $x_2>x_1$ 时,有

$\Psi(x_2)-\Psi(x_1)=\varphi(x_2)-f(x_2)-[\varphi(x_1)-f(x_1)]=\varphi(x_2)-\varphi(x_1)-[f(x_2)-f(x_1)]\geqslant 0$. 即,$\Psi(x)$ 也为单调增加的. 如此,$f(x)=\varphi(x)-\Psi(x)$ 为两个单调增加函数之差,故 $f(x)$ 为有界变差的.

**例 6.5.4** 设$\{f_n\}$为$[a,b]$上的有界变差函数序列，$\{f_n\}$在$[a,b]$上收敛于一个取有限值的函数$f$. 若存在常数$M>0$，使$T_a^b(f_n)\leqslant M(n=1,2,\cdots)$，则$f$也为有界变差的.

**证** 在$[a,b]$上任取一组分点$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_k=b$，则对于每个$n$，有

$$\sum_{i=1}^{k}|f_n(x_i)-f_n(x_{i-1})|\leqslant T_a^b(f_n)\leqslant M.$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，$\forall x\in[a,b]$，故

$$\sum_{i=1}^{k}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k}|f_n(x_i)-f_n(x_{i-1})|\leqslant M.$$

因上述$[a,b]$的一组分点是任意取的，故$T_a^b(f)\leqslant M$，即$f$在$[a,b]$上为有界变差的.

**例 6.5.5** 有界变差函数序列的一致收敛的极限函数是否一定为有界变差的?

**解** 未必. 比如，我们在区间$[0,1]$上定义如下的函数序列$\{f_n(x)\}$：对于每个自然数$n$，当$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{n}$时，定义$f_n(x)=0$；当$\frac{1}{n}<x\leqslant 1$时，定义$f_n(x)=x\sin\frac{\pi}{x}$. 易见，对于每个$n$，$f_n$在$\left[0,\frac{1}{n}\right]$和$\left[\frac{1}{n},1\right]$上都是有界变差函数. 因而，它在$[0,1]$上也是有界变差函数. 容易验证$\{f_n(x)\}$在$[0,1]$上一致地收敛于函数$f(x)$. 这里，当$x=0$时，$f(x)=0$；当$0<x\leqslant 1$时，$f(x)=x\sin\frac{\pi}{x}$. 然而，不难证明$f(x)$在$[0,1]$上并不是有界变差的. 事实上，对于每个$n$，对$[0,1]$作分割$\tau_n$：$0<\frac{2}{2n-1}<\frac{2}{2n-3}<\cdots<\frac{2}{3}<1$. 则相应于上述分割$\tau_n$，有$T_{\tau_n}(f)=\frac{2}{2n-1}+\left(\frac{2}{2n-1}+\frac{2}{2n-3}\right)+\cdots+\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}=2\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{2k-1}\to\infty(n\to\infty)$.
即，$T_0^1(f)=\infty$. 故$f$不是有界变差的.

**例 6.5.6** 证明：若$f(x)$为$[a,b]$上的有界变差函数，则$|f(x)|$也为$[a,b]$上的有界变差函数，但逆命题不成立.

**证** 对于$[a,b]$的任一个分划：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

易见，$\sum\limits_{i=1}^{n}||f(x_i)|-|f(x_{i-1})||\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\leqslant T_a^b(f)<+\infty$. 故

$T_a^b(|f|)\leqslant T_a^b(f)<+\infty$，即$|f(x)|$为$[a,b]$上的有界变差函数. 关于逆命题不成立，可作函数 $f(x)$ 如下：当 $x$ 为无理数时，$f(x)=-1$；当 $x$ 为有理数时，$f(x)=1$. 则$|f(x)|\equiv 1$，当然是$[a,b]$上的有界变差函数. 但 $f(x)$ 显然不是$[a,b]$上的有界变差函数.

**例 6.5.7**　设 $f$ 在$[a,b]$上满足 Lipschitz 条件(比如 $f$ 在$[a,b]$上可微且导函数 $f'$ 有界，就能满足这样的条件)：存在常数 $M>0$ 使$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|$，$\forall x,y\in[a,b]$，则 $f$ 为绝对连续的，当然 $f$ 也为有界变差的.

**证**　对于任意 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{M+1}>0$，则对于$[a,b]$中任意有限个互不相交的区间$(a_i,b_i)(i=1,2,\cdots,n)$，若$\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$，则

$$\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|\leqslant\sum_{i=1}^{n}M|b_i-a_i|=M\sum_{i=1}^{n}|b_i-a_i|<M\delta=M\frac{\varepsilon}{M+1}<\varepsilon.$$

故 $f$ 为绝对连续的.

**例 6.5.8**　设 $f$ 是$[a,b]$上一个有限实值函数，则下述两命题等价：

(1) $f$ 在$[a,b]$上满足 Lipschitz 条件；

(2) $f$ 是$[a,b]$上某个有界可积函数的不定积分.

**证**　(1)⇒(2)：若 $f$ 在$[a,b]$上满足 Lipschitz 条件，则由例 6.5.7 知 $f$ 为绝对连续的. 又由定理 6.4.5 知 $f'(x)$几乎处处存在，$f'\in L[a,b]$且 $f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$，$x\in[a,b]$. 对于任意的 $x_1,x_2\in[a,b]$，有

$$\left|\int_{x_1}^{x_2}f'(t)\mathrm{d}t\right|=|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant L|x_2-x_1|,$$

这里，$L$ 为 Lipschitz 常数. 由此可知$|f'(x)|\leqslant L$，$a.e.$ 于$[a,b]$. 作$[a,b]$上的函数 $g$ 如下：当$|f'(x)|\leqslant L$ 时，$g(x)=f'(x)$；当$|f'(x)|>L$ 时，$g(x)=L$. 则 $g$ 是$[a,b]$上的有界可积函数且 $g(x)=f'(x)$，$a.e.$ 于$[a,b]$. 显然我们有

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t=f(a)+\int_a^x g(t)\mathrm{d}t.$$

(2)⇒(1)：按假设，可写 $f(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t+C$，其中 $C$ 为常数，$g(t)$为$[a,b]$上的有界可积函数. 设$|g(x)|\leqslant L$，$x\in[a,b]$. 任取 $x_1,x_2\in[a,b]$，不妨设 $x_1<x_2$，则

$$|f(x_2)-f(x_1)|=\left|\int_a^{x_2}g(t)\mathrm{d}t-\int_a^{x_1}g(t)\mathrm{d}t\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}g(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_{x_1}^{x_2}|g(t)|\mathrm{d}t\leqslant L|x_2-x_1|.$$

即 $f$ 在$[a,b]$上满足 Lipschitz 条件.

**例 6.5.9**　在$[a,b]$上的绝对连续函数是否一定为 Lipschitz 的?

**解**　未必. 比如,考虑$[0,1]$上的函数 $f(x)=\sqrt{x}$. 易见,$\sqrt{x}=\int_0^x \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ ,$x\in[0,1]$. 而 $g(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}$在$[0,1]$上是 Lebesgue 可积的,故由定理 6.4.5 知 $f(x)=\sqrt{x}$ 在$[0,1]$上是绝对连续的. 另一方面,注意到 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|f(x)-f(0)|}{|x-0|}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\infty$. 由此易见,不存在 $M>0$,使对于任意 $x_1,x_2\in[0,1]$,有$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|\leqslant M|x_1-x_2|$. 即 $f(x)=\sqrt{x}$ 不是 Lipschitz 的.

**例 6.5.10**　设$[a,b]$上定义的函数 $f(x)$ 满足:对于任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使当$[a,b]$的任意有限个子区间 $\{(a_i,b_i):i=1,2,\cdots,n\}$ 的总长度小于 $\delta$ 时,有 $\sum\limits_{i=1}^n|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon$. 则 $f(x)$ 必满足 Lipschitz 条件.

**证**　任取定 $\varepsilon>0$,则存在 $\delta>0$ 满足假设条件. 取定 $0<\delta'<\delta$. 对于任意 $x\in(a,b)$,存在自然数 $n_0$,使当 $n\geqslant n_0$时,有 $x+\frac{\delta'}{n}<b$. 对于每个 $n\geqslant n_0$,构造区间组 $\{(a_k,b_k):k=1,2,\cdots,n\}$ 如下:$a_k=x,b_k=x+\frac{\delta'}{n},k=1,2,\cdots,n$.

于是 $\sum\limits_{k=1}^n(b_k-a_k)=n\frac{\delta'}{n}=\delta'<\delta$, 故有 $\sum\limits_{k=1}^n|f(b_k)-f(a_k)|=n\left|f\left(x+\frac{\delta'}{n}\right)-f(x)\right|<\varepsilon$. 即$\frac{|f(x+\delta'/n)-f(x)|}{\delta'/n}<\frac{\varepsilon}{\delta'}$,对于任意 $n\geqslant n_0$成立. 令 $n\to\infty$,可知 $f$ 在 $x$ 处至少有一个 Dini 导出数满足$|Df(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{\delta'}$. 若 $f$ 在 $x$ 处可微,则 $f'(x)=Df(x)$. 另一方面,由假设可知 $f$ 必为绝对连续的,故 $f'(x)$ 几乎处处存在,$f'\in L[a,b]$ 且 $f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$. 注意,当 $f'(x)$ 存在时,有 $|f'(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{\delta'}$. 因而对于任意 $x_1,x_2\in[a,b]$,有$|f(x_2)-f(x_1)|=\left|\int_{x_1}^{x_2}f'(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{\delta'}|x_2-x_1|$. 即 $f(x)$满足 Lipschitz 条件.

**注 6.3**　由上例及例 6.5.9 知上例的条件严格强于绝对连续函数的条件. 也即,在绝对连续函数的定义中,不能将 $\{(a_i,b_i)\}$ 两两不交的条件去掉.

有时候,我们也会考虑 $\alpha$ 阶 Lipschitz 条件($\alpha>0$). 称 $f$ 在$[a,b]$上满足 $\alpha$ 阶

Lipschitz 条件,若存在常数 $M>0$,使对于任意 $x_1,x_2\in[a,b]$,有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant M|x_1-x_2|^{\alpha}$.

**例 6.5.11** 一个不满足任何阶 Lipschitz 条件的有界变差函数.

**解** 作一个$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上的函数如下:当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$时,$f(x)=-\frac{1}{\ln x}$;当 $x=0$ 时,$f(x)=0$. 则 $f$ 是$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上单调增加的连续函数,因而为有界变差的. 以下证明:对于任意 $\alpha>0$,$f$ 不满足 $\alpha$ 阶 Lipschitz 条件. 先设 $0<\alpha\leqslant 1$. 由于

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|f(x)-f(0)|}{|x-0|^{\alpha}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1/\ln x}{x^{\alpha}}=\lim_{x\to 0^+}\alpha x^{-\alpha}=\infty,$$

故 $f$ 在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$上不满足 $\alpha$ 阶 Lipschitz 条件. 对于 $\alpha>1$,若 $f$ 满足 $\alpha$ 阶的 Lipschitz 条件,则容易证明 $f$ 为常数,此矛盾于假设.

**注 6.4** (见那汤松著;徐瑞云译. 实变函数论(上册). 北京:人民教育出版社,1958. 271～272) 在绝对连续函数的定义中,有限个互不相交的区间 $\{(a_i,b_i)\}_{1\leqslant i\leqslant n}$也可改成有限个或可数个互不相交的区间 $\{(a_i,b_i)\}_i$. 即称 $f$ 为$[a,b]$上的绝对连续函数,若对于任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使当$[a,b]$中任意有限个或可数个互不相交的区间 $\{(a_i,b_i)\}_i$满足$\sum\limits_i(b_i-a_i)<\delta$ 时,必有$\sum\limits_i|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon$. 上式中函数增量的绝对值$|f(b_i)-f(a_i)|$,还可代之以函数在$[a_i,b_i]$上的振幅 $M_i-m_i$. 这里,$M_i=\sup\{f(x):x\in[a_i,b_i]\}$,$m_i=\inf\{f(x):x\in[a_i,b_i]\}$.

**注 6.5** 显然绝对连续函数一定是连续函数. 又由引理 6.4.1,知绝对连续函数一定是有界变差函数. 自然要问:连续的有界变差函数是否一定是绝对连续函数? 答案是否定的. 其实在本章的开始,我们讨论了例 6.1.1. 在那里由 Cantor 三分集,我们定义了函数 $f$,它是一个连续的单调增加函数,当然也是连续的有界变差函数. 但是我们已见到,对于函数 $f$,Newton－Leibniz 公式不成立. 由定理 6.4.5 可知 $f$ 不是绝对连续的. 那么连续的有界变差函数再加上什么条件才能成为绝对连续函数呢? 下面的例子可帮助我们解答这个问题.

**例 6.5.12** 在$[a,b]$上的绝对连续函数 $f$ 必具性质($N$),即对于$[a,b]$中任一零测集 $E$,$f(E)$仍为零测集.

**证** 目的是证明:$m(f(E))=0$. 先设 $a,b$ 都不属于 $E$,即 $E\subset(a,b)$. 对于任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使当$[a,b]$中有限个或可列个互不相交的区间$\{(a_i,b_i)\}_i$的全长

小于$\delta$时，有

$$\sum_i (M_i - m_i) < \varepsilon.$$

这里，$M_i = \max\{f(x): x \in [a_i, b_i]\}$，$m_i = \min\{f(x): x \in [a_i, b_i]\}$. 因 $mE = 0$，$E \subset (a,b)$，故有如下的有界开集$G$，使 $E \subset G$ 且 $mG < \delta$. 因$E$含于$(a,b)$，故不妨设 $G \subset (a,b)$. 设开集$G$的构成区间为$\{(a_i, b_i)\}_i$，则 $G = \bigcup_i (a_i, b_i)$ 且 $\sum_i (b_i - a_i) = mG < \delta$，故 $f(E) \subset f(G) = \bigcup_i f((a_i, b_i)) \subset \bigcup_i f([a_i, b_i])$. 由此可知 $m^* f(E) \leqslant \sum_i m^* f([a_i, b_i]) \leqslant \sum_i (M_i - m_i) < \varepsilon$. 因 $\varepsilon > 0$ 可任意小，故 $m(f(E)) = 0$. 至于一般的情形，就是$a, b$可能属于$E$的情况，可做如下处理：$f(E) \subset f(E \backslash \{a, b\}) \cup \{f(a), f(b)\}$. 由上所证，知 $mf(E \backslash \{a,b\}) = 0$，故 $m(f(E)) = 0$.

**注 6.6** （见注 6.4 所列参考文献的第 279～280 页）在例 6.5.12 的基础上进一步可以证明：$f$ 为绝对连续当且仅当：$f$ 为连续的有界变差函数且具有性质(N).

**例 6.5.13** 设 $f(x)$ 为$[a,b]$上的绝对连续函数，证明：$\int_a^b |f'(x)| \mathrm{d}x = T_a^b(f)$.

**证** 因 $f$ 为绝对连续的，故 $f' \in L^1[a,b]$. 对于$[a,b]$的任一个分割：$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$，我们有

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x) \mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b |f'(x)| \mathrm{d}x.$$

由此可知 $T_a^b(f) \leqslant \int_a^b |f'(x)| \mathrm{d}x$.

以下证明相反的不等式. 以$S$表示如下的阶梯函数$s(x)$组成的集合：$s(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{[x_{i-1}, x_i]}$，这里，$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$，$\chi_{[x_{i-1}, x_i]}$为区间$[x_{i-1}, x_i]$的特征函数，$|\alpha_i| \leqslant 1$. 则对于任意 $s \in S$，有 $\left| \int_a^b f'(x) s(x) \mathrm{d}x \right| = \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x) \alpha_i \mathrm{d}x \right| = \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i [f(x_i) - f(x_{i-1})] \right| \leqslant \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leqslant T_a^b(f)$. 对于可测函数 $\operatorname{sgn} f'(x)$，可以证明存在$S$中序列$\{s_n\}$，使 $s_n(x) \to \operatorname{sgn} f'(x)$，$a.e.$ 于$[a,b]$上. 由 Lebesgue 控制收敛定理，知

$\int_a^b |f'(x)| \mathrm{d}x = \int_a^b f'(x) \operatorname{sgn} f'(x) \mathrm{d}x = \lim\limits_{x \to \infty} \int_a^b f'(x) s_n(x) \mathrm{d}x$. 对于每个 $n$，有 $\left| \int_a^b f'(x) s_n(x) \mathrm{d}x \right| \leqslant T_a^b(f)$. 故 $\int_a^b |f'(x)| \mathrm{d}x \leqslant T_a^b(f)$.

最后我们得到$\int_a^b |f'(x)| \mathrm{d}x = T_a^b(f)$.

**例 6.5.14** $f(x)$是$[a,b]$上绝对连续函数的充分必要条件是$T_a^x(f)$是绝对连续函数.

**证** 设$f(x)$是绝对连续函数,则由上例知$T_a^x(f) = \int_a^x |f'(x)\mathrm{d}x|$. 于是$T_a^x(f)$是$|f'(x)| \in L[a,b]$的不定积分,当然为绝对连续的. 反之,若$T_a^x(f)$是绝对连续函数.则对于任意$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,使当两两不交的有限个区间$\{(a_i,b_i)\}$的总长度$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$时,有$\sum_{i=1}^n |T_a^{b_i}(f) - T_a^{a_i}(f)| < \varepsilon$,即$\sum_{i=1}^n T_{a_i}^{b_i}(f) < \varepsilon$. 注意到$|f(b_i) - f(a_i)| < T_{a_i}^{b_i}(f)$,故$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$,即$f(x)$为绝对连续的.

# 习 题 六

1. 若函数 $f(x)$在$[a,b]$上满足 Lipschitz 条件：$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|$，$x,y\in[a,b]$，则 $f(x)$是$[a,b]$上的有界变差函数.

2. 试证明：$T_a^b(f)=0$ 当且仅当：$f(x)=C$(常数).

3. 若 $f(x)$是$[a,b]$上的可微函数且$|f'(x)|\leqslant M(a\leqslant x\leqslant b)$，则 $f(x)$是$[a,b]$上的有界变差函数.

4. 设 $f(x)$是$[a,b]$上的单调增加函数，函数 $g(x)$在 $\mathbf{R}^1$ 上满足 Lipschitz 条件：$|g(x)-g(y)|\leqslant M|x-y|$，$x,y\in[a,b]$. 试证明：$g(f(x))$是$[a,b]$上的有界变差函数.

5. 设 $f\in L([0,1])$，$g(x)$是定义在$[0,1]$上的单调上升函数，若对任意的$[a,b]\subset[0,1]$，有 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|^2\leqslant[g(b)-g(a)](b-a)$，试证明：$f^2(x)$是$[0,1]$上的可积函数.

6. 设 $f(x)$，$g(x)$是$[a,b]$上的绝对连续函数，则 $f(x)+g(x)$是$[a,b]$上的绝对连续函数.

7. 若 $f(x)$是$[a,b]$上的可微函数且$|f'(x)|\leqslant M(a\leqslant x\leqslant b)$，则 $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$.

8. 设 $f(x)$是$[0,1]$上的有界变差函数，若对任意 $\varepsilon>0$，$f(x)$是$[\varepsilon,1]$上的绝对连续函数，且 $f(x)$在 $x=0$ 处连续，试证明：$f(x)$是$[0,1]$上的绝对连续函数.

9. 若 $f(x)$是$[a,b]$上的绝对连续函数，且有$|f'(x)|\leqslant M$，$a.e.$，$x\in[a,b]$，则$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|$，$x,y\in[a,b]$.

10. 若函数 $f(x)$在$[a,b]$上满足 Lipschitz 条件：$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|$，$x,y\in[a,b]$，则$|f'(x)|\leqslant M$，$a.e.$，$x\in[a,b]$.

11. 设 $E\subset[0,1]$，若存在 $l$：$0<l<1$，使得对$[0,1]$中的任意子区间$[a,b]$，均有 $m(E\cap[a,b])\geqslant l(b-a)$，试证明：$m(E)=1$.

12. 设函数 $f\in L([a,b])$，若对任意的 $c\in[a,b]$，有 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x=c-a$，试证

明：$f(x)=1$ a.e.，$x\in[a,b]$.

13. 设 $f(x)$在$[a,b]$上递增，且有 $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b)-f(a)$，试证明：$f(x)$在$[a,b]$上绝对连续.

14. 设$\{g_k(x)\}$是在$[a,b]$上的绝对连续函数列，又$|g'_k(x)|\leqslant F(x)$，a.e.（$k=1,2,\cdots$），且 $F\in L([a,b])$. 若

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x)=g(x)\,(a\leqslant x\leqslant b),\ \lim_{k\to\infty} g'_k(x)=f(x),\ \text{a.e.},\ x\in[a,b],$$

试证明：$g'(x)=f(x)$，a.e.，$x\in[a,b]$.

# 7　$L^p$ 空间

我们知道 $n$ 维欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 按坐标态的加法与数乘是一个线性空间，在赋予欧几里得距离以后，它具有一些好的性质，如完备性（即每个 Cauchy 列必收敛）和可分性（即具有可数稠子集）等. 在学习了 Lebesgue 积分后，我们有了 Lebesgue 可积函数类，即，使 $\int |f(x)|\mathrm{d}x<\infty$ 的函数 $f$ 所构成的函数类. 我们还可考虑 $p$（$1\leqslant p<\infty$）次 Lebesgue 可积函数类，即，使 $\int |f(x)|^p\mathrm{d}x<\infty$ 的函数 $f$ 所构成的函数类. 容易验证，这些函数类对于按通常方式定义的函数的加法与数乘是封闭的，因而它们都是线性空间. 在这种空间中每个点就是一个函数. 我们还要在这些空间中分别引入适当的距离，使得它们在各自的距离下也具有如上所述的完备性和可分性. 这就是本章我们所要讨论的 $L^p$ 空间理论. 这一理论不但是有趣的，而且在泛函分析和数学的其他分支中都具有重要作用.

## 7.1　$L^p$ 空间的定义与有关不等式

首先说明，本章中 $n$ 有时表示 $n$ 维欧几里得空间的维数；有时表示函数序列或点列的下标，这时它取遍一切自然数. 从前后文的内容很容易区别.

设 $E\subset\mathbf{R}^n$ 为可测集，$m(E)>0$，$p>0$ 为给定的实数.

**定义 7.1.1**　设 $f(x)$ 是 $E$ 上的可测函数，若 $\int_E |f(x)|^p\mathrm{d}x<\infty$，则称 $f(x)$ 为 $E$ 上的 **$p$ 次可积函数**. 这种函数全体所成的集合记作 $L^p(E)$，也称它为 $L^p$ 空间.

**注 7.1**　更深入的研究可以发现 $0<p<1$ 与 $p\geqslant 1$ 的情况有很大的不同，这里我们只考虑 $p\geqslant 1$ 的情况.

容易看到，若 $f\in L^p(E)$，则 $cf\in L^p(E)$，这里 $c$ 为常数. 此外，若 $f,g\in L^p(E)$，则

$$\int_E |f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x\leqslant\int_E[2\max\{|f(x)|,|g(x)|\}]^p\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_E 2^p(|f(x)|^p+|g(x)|^p)\mathrm{d}x<\infty.$$

故 $f+g\in L^p(E)$. 这样，按照函数通常的加法与数乘运算(即按点态定义的加法与数乘)，$L^p(E)$成为线性空间.

对于 $f\in L^p(E)$，定义 $\|f\|_p=(\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}$，它叫做 $f$ 的 $p$ **范数**. 显然，$\|f\|_p=0$ 当且仅当：$f(x)=0$ 几乎处处成立. 若 $c$ 为常数，则 $\|cf\|_p=|c|\ \|f\|$，这称为**绝对齐性**. 对于 $f,g\in L^p(E)$，还可以证明(见后面的定理 7.1.3) $\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p$，这称为**次可加性**.

**定义 7.1.2** 设 $f(x)$是 $E$ 上的可测函数. 若存在 $E$ 的零测子集 $E_0$ 及 $M>0$ 使$|f(x)|\leqslant M$, $\forall x\in E\backslash E_0$，则称 $f(x)$为 $E$ 上的**本性有界函数**. 这种函数全体所成的集合记作 $L^\infty(E)$，也称它为 $L^\infty$ **空间**.

容易看到，若 $f\in L^\infty(E)$，则对于任意常数 $c$，$cf\in L^\infty(E)$. 此外，若 $f,g\in L^\infty(E)$，则存在 $E$ 的零测子集 $E_1,E_2$ 及 $M_1,M_2>0$，使$|f(x)|\leqslant M_1$, $\forall x\in E\backslash E_1$ 及$|g(x)|\leqslant M_2$, $\forall x\in E\backslash E_2$. 显然，$E_1\cup E_2$ 仍为 $E$ 的零测子集，且有$|(f+g)(x)|\leqslant|f(x)|+|g(x)|\leqslant M_1+M_2$, $\forall x\in E\backslash(E_1\cup E_2)$. 这就是说，$f+g\in L^\infty(E)$. 因此，按照函数通常的加法与数乘，$L^\infty(E)$也是一个线性空间.

对于 $f\in L^\infty(E)$，定义

$$\|f\|_\infty=\inf\{M>0\text{：除了 } E \text{ 的一个零测集外，}|f(x)|\leqslant M\},$$

它叫做 $f$ 的**本性上界范数**.

显然，$\|f\|_\infty=0$ 当且仅当：$f=0$ 几乎处处成立. 易见，若 $c$ 为常数，则 $\|cf\|_\infty=|c|\ \|f\|_\infty$. 我们还可以证明：对于 $f,g\in L^\infty(E)$，有 $\|f+g\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$.

**例 7.1.1** 设 $f,g\in L^\infty(E)$，则 $\|f+g\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$.

**证** 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $E$ 的零测子集 $E_1,E_2$，使$|f(x)|\leqslant\|f\|_\infty+\varepsilon$, $\forall x\in E\backslash E_1$ 及$|g(x)|\leqslant\|g\|_\infty+\varepsilon$, $\forall x\in E\backslash E_2$. 显然 $E_1\cup E_2$ 仍为 $E$ 的零测子集，且有

$|(f+g)(x)|\leqslant|f(x)|+|g(x)|\leqslant\|f\|_\infty+\|g\|_\infty+2\varepsilon$, $\forall x\in E\backslash(E_1\cup E_2)$.

由此可知，$\|f+g\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty+\|g\|_\infty+2\varepsilon$. 因 $\varepsilon>0$ 可任意小，故 $\|f+g\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$.

**例 7.1.2** 设 $f\in L^{\infty}(E)$，则存在 $E$ 的一个零测子集 $E_0$，使 $|f(x)|\leqslant\|f\|_{\infty}$，$\forall x\in E\backslash E_0$.

**证** 由 $\|f\|_{\infty}$ 的定义，知对于每个自然数 $k$，存在 $E$ 的一个零测子集 $E_k$，使 $|f(x)|\leqslant\|f\|_{\infty}+\dfrac{1}{k}$，$\forall x\in E\backslash E_k$. 令 $E_0=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$，则 $E_0$ 仍为 $E$ 的零测子集且对于 $\forall x\in E\backslash E_0$，有 $|f(x)|\leqslant\|f\|_{\infty}+\dfrac{1}{k}$，$\forall k\in N$.

由此可知，对于 $\forall x\in E\backslash E_0$，有 $|f(x)|\leqslant\|f\|_{\infty}$.

**例 7.1.3** 设 $m(E)<\infty$，$1\leqslant p<q$，则 $L^q(E)\subset L^p(E)$.

**证** 设 $f\in L^q(E)$，记集合 $\{x\in E:|f(x)|\geqslant 1\}$ 为 $A$，$B=E\backslash A$，则

$$\int_E|f|^p\mathrm{d}x=\int_A|f|^p\mathrm{d}x+\int_B|f|^p\mathrm{d}x\leqslant\int_A|f|^q\mathrm{d}x+m(B)\leqslant\int_E|f|^q\mathrm{d}x+m(E)<\infty.$$

即 $f\in L^p(E)$. 这就证明了 $L^q(E)\subset L^p(E)$.

注意，当 $m(E)=+\infty$ 时，例 7.1.3 的结论不再成立. 例如，设 $E=[1,+\infty]$，$f(x)=x^{-1/2}$，则 $f\in L^3(E)$，但 $f\notin L^2(E)$.

**定义 7.1.3** 若 $p,q>1$ 且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，则称 $p$ 与 $q$ 为一对**共轭指标**. 显然，当 $p=2$ 时，其共轭指标为 $q=2$；当 $p=1$ 时，则规定其共轭指标为 $q=\infty$；当 $p=\infty$ 时，则规定其共轭指标为 $q=1$.

现在，我们要介绍两个常用的重要不等式. 先看一个引理.

**引理 7.1.1** 当 $1<p<\infty$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ 时，对于任意非负实数 $a,b$，有

$$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}\leqslant\frac{a}{p}+\frac{b}{q},$$

其中等号成立当且仅当：$a=b$.

**证** 当 $a,b$ 中至少有一个为 0 时，结论显然成立. 今设 $a>0$，$b>0$. 考虑函数 $\varphi(t)=\mathrm{e}^t$，显然它是 $\mathbf{R}^1$ 上的凸函数（这里指向下凸的函数），故我们有

$$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{p}\ln a+\frac{1}{q}\ln b}=\varphi\left(\frac{1}{p}\ln a+\frac{1}{q}\ln b\right)\leqslant\frac{1}{p}\varphi(\ln a)+\frac{1}{q}\varphi(\ln b)=\frac{1}{p}\mathrm{e}^{\ln a}+\frac{1}{q}\mathrm{e}^{\ln b}=\frac{a}{p}+\frac{b}{q}.$$

容易看到，上述不等式中等号成立当且仅当：$a=b$.

**定理 7.1.2(Holder 不等式)**　设 $p,q$ 为一对共轭指数，$1\leqslant p,q\leqslant\infty$. 若 $f\in L^p(E)$，$g\in L^q(E)$，则有 $\|fg\|_1\leqslant\|f\|_p\|g\|_q$.

**证**　首先考虑 $p=1,q=\infty$时的情况. 由于积分值与函数在零测集上的取值无关，而由例 7.1.2 知存在 $E$ 的零测子集 $E_0$，使 $|g(x)|\leqslant\|g\|_\infty$，$\forall x\in E\backslash E_0$，故我们有

$$\|fg\|_1=\int_E|f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x=\int_{E\backslash E_0}|f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\|g\|_\infty\int_{E\backslash E_0}|f(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$=\|g\|_\infty\int_E|f(x)|\,\mathrm{d}x=\|f\|_1\|g\|_\infty.$$

同理可证明，当 $p=\infty,q=1$ 时，结论也成立.

现在考虑 $1<p<\infty,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ 时的情况. 若 $\|f\|_p$ 和 $\|g\|_q$ 中有一个为零，则 $f$ 或 $g$ 几乎处处为零. 显然，$\|fg\|_1=\|f\|_p\|g\|_q=0$. 当然结论成立. 今设 $\|f\|_p>0$，$\|g\|_q>0$. 在引理 7.1.1 的公式 $a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}\leqslant\dfrac{a}{p}+\dfrac{b}{q}$ 中，令 $a=\dfrac{|f(x)|^p}{(\|f\|_p)^p}$，$b=\dfrac{|g(x)|^q}{(\|g\|_q)^q}$，$x\in E$，则有

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\leqslant\frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{(\|f\|_p)^p}+\frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{(\|g\|_q)^q},x\in E.$$

上式两端同时取 $E$ 上的积分，有

$$\frac{1}{\|f\|_p}\frac{1}{\|g\|_q}\int_E|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

由此可知，$\|fg\|_1=\int_E|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\leqslant\|f\|_p\|g\|_q$.

**注 7.2**　特别地，若 $p=q=2$，则由定理 7.1.2 可知：若 $f,g\in L^2(E)$，则 $\|fg\|_1\leqslant\|f\|_2\|g\|_2$. 这通常被称为 Schwartz 不等式.

**注 7.3**　当 $1<p<\infty,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ 时，由引理 7.1.1，知不等式 $a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}\leqslant\dfrac{a}{p}+\dfrac{b}{q}$ 中等号成立当且仅当：$a=b$. 由此可推知，Holder 不等式中等号成立当且仅当：

$$\frac{|f(x)|^p}{(\|f\|_p)^p}=\frac{|g(x)|^q}{(\|g\|_q)^q}\text{几乎处处成立.}$$

也即，在不计零测集的意义下，$|f|^p$ 和 $|g|^q$ 只差一个非负常数因子.

**定理 7.1.3(Minkowski 不等式)**　若 $f,g\in L^p(E)(1\leqslant p\leqslant\infty)$，则

$$\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p.$$

**证** 当 $p=1$ 时，结论显然成立；当 $p=\infty$ 时，由例 7.1.1 知结论也成立.

以下设 $1<p<\infty$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 我们已见到：若 $f,g\in L^p(E)$，则 $f+g\in L^p(E)$. 故 $|f+g|^{\frac{p}{q}}\in L^q(E)$. 由 Holder 不等式知：

$$\|f\cdot|f+g|^{\frac{p}{q}}\|_1\leqslant\|f\|_p\||f+g|^{\frac{p}{q}}\|_q,\tag{7.1}$$

$$\|g\cdot|f+g|^{\frac{p}{q}}\|_1\leqslant\|g\|_p\||f+g|^{\frac{p}{q}}\|_q.\tag{7.2}$$

由(7.1)和(7.2)式可推出：

$$(\|f+g\|_p)^p=\int_E|f(x)+g(x)|^p\mathrm{d}x=\int_E|f(x)+g(x)||f(x)+g(x)|^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_E|f(x)||f(x)+g(x)|^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}x+\int_E|g(x)||f(x)+g(x)|^{\frac{p}{q}}\mathrm{d}x=\|f\cdot|f+g|^{\frac{p}{q}}\|_1+\|g\cdot|f+g|^{\frac{p}{q}}\|_1$$

$$\leqslant\|f\|_p\||f+g|^{\frac{p}{q}}\|_q+\|g\|_p\||f+g|^{\frac{p}{q}}\|_q=(\|f\|_p+\|g\|_p)\left(\int_E|f+g|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=(\|f\|_p+\|g\|_p)\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}.$$

若 $\|f+g\|_p>0$，则由上式可知，$(\|f+g\|_p)^{p-\frac{p}{q}}\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p$. 即，$\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p$.

若 $\|f+g\|_p=0$，则结论显然成立.

**注 7.4** 可以证明，定理 7.1.3 中的 Minkowski 不等式中的等号成立当且仅当：存在非负实数 $\lambda$，使在 $E$ 上几乎处处有 $f(x)=\lambda g(x)$ 或 $g(x)=\lambda f(x)$.

## 7.2 $L^p$ 空间($1\leqslant p\leqslant\infty$)的完备性

我们已经看到，按照函数通常的加法与数乘，$L^p(E)(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 是一个线性空间. 在 $L^p(E)$ 上可以定义 $p$ - 范数如下：$f\mapsto\|f\|_p$. 它具有下述性质：对于任意 $f,g\in L^p(E)$，任意常数 $\alpha$ 有：$\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p$ 及 $\|\alpha f\|_p=|\alpha|\|f\|_p$.

这使我们想起了 $n$ 维欧几里得空间中向量的长度概念. $p$ - 范数应该是 $L^p(E)$ 中向量的"长度". 为此，我们需要认定：当 $\|f\|_p=0$ 时，$f$ 应为 $L^p(E)$ 中的零元素(即零向量). 但是，由 $\|f\|_p=0$，我们只能断定 $f$ 在 $E$ 上几乎处处为零. 因而，我们自然想到：应把 $E$ 上几乎处处为零的函数全体看作空间中的零元素. 换句话说，把 $L^p(E)$ 中几乎处处相等的两个函数 $f,g$，看作是同一个元素. 以下我们用严格的数学语言来表达上述想法. 如在 4.1 节中，我们称 $L^p(E)$ 中两个函数 $f,g$ 为对等

的，记作 $f\sim g$，若 $f$ 和 $g$ 在 $E$ 上几乎处处相等. 易验证，对等关系满足下述三条：

对于任意 $f,g,h\in L^p(E)$，有：(i) $f\sim f$；(ii) $f\sim g\Leftrightarrow g\sim f$；(iii) $f\sim g, g\sim h\Rightarrow f\sim h$. 因而上述对等关系是一种等价关系. 按此等价关系“～”，可把 $L^p(E)$ 中全体元分成一些等价类. 称 $f,g$ 属于同一个等价类，若 $f\sim g$. 对于 $L^p(E)$ 中任两个等价类 $F$、$G$，要么 $F=G$ 要么 $F\cap G=\varnothing$，把全体等价类所成的集合记作 $L^p(E)/\sim$，即 $L^p(E)/\sim$ 中每个元素 $F$ 是 $L^p(E)$ 中的一个等价类. 事实上，任取 $f\in F$，我们有 $F=f+M$，这里 $M=\{f\in L^p(E): f$ 几乎处处为 $0\}$ 是 $L^p(E)$ 的线性子空间. 容易看到，$L^p(E)/\sim$ 即为商空间 $L^p(E)/M$. 由于有：$f_1\sim g_1$ 且 $f_2\sim g_2\Rightarrow f_1+f_2\sim g_1+g_2$，及 $f_1\sim g_1\Rightarrow \alpha f_1\sim \alpha g_1$，故利用等价类所包含元素(即通常的函数)的加法与数乘，可定义商空间 $L^p(E)/M$ 上的加法与数乘. 从而使 $L^p(E)/M$ 为线性空间. 以后为了方便起见，我们仍把商空间 $L^p(E)/M$ 记作 $L^p(E)$，$L^p(E)/M$ 中的元素仍记作 $f$. 作了这样的约定以后，我们可用 $p$－范数来定义 $L^p(E)$（实际上是 $L^p(E)/M$）中两个元素之间的距离.

**定义 7.2.1** 设 $1\leqslant p\leqslant\infty$. 对于任意 $f,g\in L^p(E)$，定义 $d(f,g)=\|f-g\|_p$. 显然，$d$ 满足关于距离的三条公理：对于任意 $f,g,h\in L^p(E)$，有：

(1) $d(f,g)\geqslant 0$ 且 $d(f,g)=0\Leftrightarrow f=g$；

(2) $d(f,g)=d(g,f)$；

(3) $d(f,h)\leqslant d(f,g)+d(g,h)$.

这样，$(L^p(E),d)$ 成为距离空间. 我们也常将距离空间 $(L^p(E),d)$ 简记为 $L^p(E)$. 称 $L^p(E)$ 中点列 $\{f_n\}$ 收敛于 $f$，若 $d(f_n,f)=\|f_n-f\|_p\to 0(n\to\infty)$.

**定义 7.2.2** 设 $\{f_n\}\subset L^p(E)$. 若对于任意 $\varepsilon>0$，存在自然数 $N$，使当 $m,n\geqslant N$ 时，有 $d(f_n,f_m)=\|f_n-f_m\|_p<\varepsilon$，则称 $\{f_n\}$ 为 $L^p(E)$ 中的 **Cauchy 列**.

我们将证明：距离空间 $L^p(E)$ 是完备的，即 $L^p(E)$ 中每个 Cauchy 列必在 $L^p(E)$ 中收敛.

**定理 7.2.1** $L^p(E)(1\leqslant p<\infty)$ 是完备的距离空间.

**证** 设 $\{f_n\}$ 为 $L^p(E)$ 中的 Cauchy 列. 对于 $i=1,2,3,\cdots$，存在递增的自然数序列 $n_1<n_2<n_3<\cdots$ 使 $\|f_m-f_{n_i}\|_p<2^{-i}$，当 $m\geqslant n_i$ 时成立. 特别地，有 $\|f_{n_{i+1}}-f_{n_i}\|<2^{-i}$.

令 $g_k(x)=\sum\limits_{i=1}^{k}|f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x)|$，$g(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}|f_{n_{i+1}}(x)-f_{n_i}(x)|$，$x\in E$. 由

Minkowski 不等式知：$\| g_k \|_p \leqslant \sum_{i=1}^{k} \| f_{n_{i+1}} - f_{n_i} \|_p < \sum_{i=1}^{k} 2^{-i} < 1$.

故 $\int_E |g_k(x)|^p \mathrm{d}x < 1$. 显然，$g(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x)$，$x \in E$. 故由 Fatou 引理知：$\int_E |g(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \int_E |g_k(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant 1$，因而 $\| g \|_p \leqslant 1$. 特别地，$g(x) < \infty$ 几乎处处成立. 故存在 $E$ 的零测子集 $S$，使级数 $f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{\infty}[f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)]$ 在 $E \backslash S$ 上处处绝对收敛.

定义 $E$ 上的可测函数 $f$ 如下：

当 $x \in S$ 时，$f(x) = 0$；

当 $x \in E \backslash S$ 时，$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{\infty}[f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)]$.

于是，可测函数序列 $\{f_{n_i}(x)\}$ 几乎处处收敛于 $f(x)$. 对于任意 $\varepsilon > 0$，取自然数 $N$，使当 $m, n_i \geqslant N$ 时，有 $\| f_m - f_{n_i} \|_p < \varepsilon$，或即，$\int_E |f_m(x) - f_{n_i}(x)|^p \mathrm{d}x < \varepsilon^p$.

由 Fatou 引理知：

$$\int_E |f_m(x) - f(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{i\to\infty} \int_E |f_m(x) - f_{n_i}(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant \varepsilon^p. \tag{7.3}$$

由此可知，$f - f_m \in L^p(E)$. 故 $f \in L^p(E)$. 再由(7.3)式，知当 $m \geqslant N$ 时，有 $\| f_m - f \|_p \leqslant \varepsilon$. 故 $\{f_m\}$ 在 $L^p(E)$ 中收敛于 $f$.

**定理 7.2.2** $L^\infty(E)$ 是完备的距离空间.

**证** 设 $\{f_n\}$ 是 $L^\infty(E)$ 中 Cauchy 列. 对于自然数 $k, m, n$，令

$A_k := \{x \in E : |f_k(x)| > \| f_k \|_\infty\}$；$B_{mn} := \{x \in E : |f_n(x) - f_m(x)| > \| f_n - f_m \|_\infty\}$.

显然，每个 $A_k$、每个 $B_{mn}$ 都是 $E$ 的零测子集. 令 $S = (\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \cup (\bigcup_{m,n=1}^{\infty} B_{mn})$，则 $S$ 作为零测子集的可数并仍为 $E$ 的零测子集. 对于任意 $x \in E \backslash S$，任意自然数 $m, n$，有 $|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \| f_m - f_n \|_\infty$.

由此可知：当 $x \in E \backslash S$ 时，$\{f_n(x)\}$ 为 Cauchy 数列，故必定收敛. 定义 $E$ 上的函数 $f$ 如下：当 $x \in S$ 时，$f(x) = 0$；当 $x \in E \backslash S$ 时，$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

显然，$f$ 为 $E$ 上的可测函数. 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在自然数 $N$，使当 $m, n \geqslant N$ 时，有 $\| f_n - f_m \|_\infty < \varepsilon$. 于是当 $m, n \geqslant N$ 时，对于一切 $x \in E \backslash S$，有 $|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \| f_m - f_n \|_\infty < \varepsilon$. 令 $m \to \infty$，有 $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$，$\forall x \in E \backslash S$.

由此可知：当 $n\geqslant N$ 时，$\|f-f_n\|_\infty\leqslant\varepsilon$. 故 $f\in L^\infty(E)$ 且 $\{f_n\}$ 在 $L^\infty(E)$ 中收敛于 $f$.

以后，当我们写 $L^p(E)(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 时，若无其他声明，总是指 $L^p(E)$ 赋予由范数 $\|\ \|_p$ 所生成的距离. 由定理 7.2.1 和定理 7.2.2，知 $L^p(E)(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 为完备的. 但并不是所有的距离空间都是完备的. 我们看下面的例子.

**例 7.2.1** 以 $C[0,1]$ 表示定义于 $[0,1]$ 上的连续实值函数全体所成的线性空间（加法和数乘按点态定义）. 设 $1\leqslant p<\infty$ 给定. 对于任意 $f,g\in C[0,1]$，定义 $d(f,g)=\left(\int_0^1|f(x)-g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$. 易验证 $d$ 是 $C[0,1]$ 上的距离. 我们将看到：距离空间 $(C[0,1],d)$ 是不完备的. 作 $C[0,1]$ 中点列 $\{f_n\}$ 如下：

当 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$f_n(x)=0$；

当 $\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$ 时，$f_n(x)=2n\left(x-\frac{1}{2}\right)$；

当 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f_n(x)=1$.

显然，每个 $f_n\in C[0,1]$. 对于任意 $\varepsilon>0$，当 $m>n>\frac{1}{2\varepsilon^p}$ 时，

$$d(f_m,f_n)=\left(\int_0^1|f_m(x)-f_n(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}}|f_m(x)-f_n(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon.$$

故 $\{f_n\}$ 为 $(C[0,1],d)$ 中的 Cauchy 列. 若 $\{f_n\}$ 按距离 $d$ 收敛于某 $f\in C[0,1]$，则

$$d(f_n,f)=\left(\int_0^1|f_n(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\int_0^{\frac{1}{2}}|f(x)|^p\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}}|f_n(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}}^1|1-f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\to 0(n\to\infty).$$

由此可知：$\int_0^{\frac{1}{2}}|f(x)|^p\mathrm{d}x=0$ 及 $\int_{\frac{1}{2}}^1|1-f(x)|^p\mathrm{d}x=0$. 由于 $f$ 在 $[0,1]$ 上连续，故 $f$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上恒为 0，而在 $\left(\frac{1}{2},1\right]$ 上恒为 1. 如此，$f$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处不连续. 此矛盾于 $f\in C[0,1]$.

事实上,我们将看到下述结论.

**例 7.2.2** $C[0,1]$稠密于$(L^p[0,1],d)(1\leqslant p<\infty)$.

**证** 任取 $f\in L^p[0,1]$,由积分的绝对连续性,知对于任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使当 $A\subset[0,1]$,$m(A)<\delta$ 时,有 $\int_A|f(x)|^p\mathrm{d}x<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$. 又由 $f\in L^p[0,1]$,可以知道存在自然数 $N$,使 $m(|f|\geqslant N)=m\{x\in[0,1]:|f(x)|\geqslant N\}<\delta$.

作函数$\bar{f}$如下:当$|f(x)|<N$ 时,$\bar{f}(x)=f(x)$;否则,$\bar{f}(x)=0$. 于是,$\bar{f}\in L^p[0,1]$,$|\bar{f}(x)|\leqslant N$,且有

$$\int_0^1|f(x)-\bar{f}(x)|^p\mathrm{d}x=\int_{(|f|\geqslant N)}|f(x)|^p\mathrm{d}x<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p. \tag{7.4}$$

今$\bar{f}$为$[0,1]$上的有界可测函数,由 Lusin 定理,知对于任意 $\eta>0$,存在 $g\in C[0,1]$及可测集 $G\subset[0,1]$,使 $mG<\eta$,在$[0,1]\backslash G$ 上$\bar{f}(x)=g(x)$处处成立,而且$|g(x)|\leqslant N$.

如此,$\int_0^1|\bar{f}-g|^p\mathrm{d}x=\int_G|\bar{f}-g|^p\mathrm{d}x\leqslant 2^pN^pmG<2^pN^p\eta$. 只要取 $\eta>0$ 足够小,便可使

$$\int_0^1|\bar{f}-g|^p\mathrm{d}x<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p. \tag{7.5}$$

最后,结合(7.4)和(7.5)式,我们有

$$\|f-g\|_p\leqslant\|f-\bar{f}\|_p+\|\bar{f}-g\|_p<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

**例 7.2.3** 在 $C[0,1]$上赋予如下距离 $\rho$. 对于任意 $f,g\in C[0,1]$,定义$\rho(f,g)=\max\{|f(x)-g(x)|:x\in[0,1]\}$. 证明:$(C[0,1],\rho)$为完备距离空间.

**证** 设$\{f_n\}$为$(C[0,1],\rho)$中 Cauchy 列. 则对于任意 $\varepsilon>0$,存在自然数 $N$,使当 $m,n\geqslant N$ 时,有

$$\rho(f_m,f_n)=\max\{|f_m(x)-f_n(x)|:x\in[0,1]\}<\varepsilon. \tag{7.6}$$

这样,对于每个 $x\in[0,1]$,$\{f_n(x)\}$为 Cauchy 数列,因而必收敛. 设其极限为 $f(x)$. 在(7.6)式中,令 $m\to\infty$,有

$$\max\{|f(x)-f_n(x)|:x\in[0,1]\}\leqslant\varepsilon\ (n\geqslant N). \tag{7.7}$$

这说明$\{f_n(x)\}$在$[0,1]$上一致地收敛于 $f(x)$. 由数学分析知 $f(x)$是$[0,1]$上的连续函数,即 $f\in C[0,1]$,且由(7.7)式知 $\rho(f,f_n)\to 0(n\to\infty)$,因而$(C[0,1],\rho)$为完备的距离空间.

由例 7.2.1 和例 7.2.3 可知，同一个线性空间，赋予一种距离可能是不完备的，但赋予另一种距离又可以是完备的.

**例 7.2.4** 设 $P[0,1]$为$[0,1]$上的实系数多项式全体所成的集合，按通常函数的加法与数乘(即点态的加法与数乘)，$P[0,1]$是 $C[0,1]$的线性子空间. 可以证明：$P[0,1]$稠密于 $C[0,1]$. 这里，$\rho$ 是如例 7.2.3 中所定义的距离. 事实上，由 Weierstrass 逼近定理，知对于任意 $f\in C[0,1]$，存在多项式序列$\{\varphi_n\}$，使在$[0,1]$上$\{\varphi_n\}$一致地收敛于 $f$(详见那汤松著. 徐瑞云译. 实变函数论(上册). 北京：人民教育出版社，1958. 119～122)，即按距离 $\rho$，$\{\varphi_n\}$收敛于 $f$. 由此，当然可知$(P[0,1],\rho)$是不完备的.

## 7.3 $L^p$ 空间$(1\leqslant p<\infty)$的可分性

除了完备性以外，$n$ 维欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 还具有一个很重要的性质，即可分性，也就是说 $\mathbf{R}^n$ 具有一个可数稠子集. 比如，坐标是有理数的点的全体构成的集合就是一个可数集，而且它稠密于整个 $\mathbf{R}^n$. 我们将看到 $L^p(E)(1\leqslant p<\infty)$也具有这个性质，即它是可分的.

首先就 $E=[0,1]\subset\mathbf{R}^1$ 的特殊情况证明上述结论.

**定理 7.3.1** $L^p[0,1](1\leqslant p<\infty)$是可分的.

**证** 任取 $f\in L^p[0,1]$. 由例 7.2.2 知对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $g\in C[0,1]$，使 $\|f-g\|_p<\varepsilon$. 对于 $g\in C[0,1]$，再由例 7.2.4 知存在 $\varphi\in P[0,1]$，使 $\|g-\varphi\|_\infty<\varepsilon$. 由此可知：$\|g-\varphi\|_p=(\int_0^1|g-\varphi|^p\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}\leqslant\|g-\varphi\|_\infty<\varepsilon$.

再取 $\Psi\in P[0,1]$使 $\Psi$ 具有有理系数且使 $\|\Psi-\varphi\|_p<\varepsilon$. 这样，我们有

$$\|f-\Psi\|_p\leqslant\|f-g\|_p+\|g-\varphi\|_p+\|\varphi-\Psi\|_p<3\varepsilon. \quad (7.8)$$

以 $Q[0,1]$表示具有有理系数的多项式全体所成的集合. 则显然 $Q[0,1]$是可数集，且由(7.8)式知 $Q[0,1]$稠于 $L^p[0,1]$. 故 $L^p[0,1]$为可分的.

由定理 7.3.1，自然可知 $L^p[a,b](1\leqslant p<\infty)$为可分的. 定理 7.3.1 的证明思路是：先用连续函数来逼近 $p$-次可积函数，再用多项式来逼近连续函数，最后用具有有理系数的多项式来逼近一般的多项式. 由于具有有理系数的多项式全体是可数集，这就证明了 $L^p[0,1](1\leqslant p<\infty)$为可分的. 下面我们利用简单可测函数的逼近方法来证明更一般的结论.

**定理 7.3.2**　$L^p(E)(1\leqslant p<\infty)$是可分的. 这里 $E\subset R^k$ 为可测集.

**证**　对于任意 $f\in L^p(E)$及任意 $\varepsilon>0$,由引理 5.5.1,可知存在具有紧支集的简单可测函数 $\varphi$,使

$$\| f-\varphi \|_p<\varepsilon. \tag{7.9}$$

设 $\varphi(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{E_i}(x)$,这里,$E_1,E_2,\cdots,E_n$ 为 $E$ 的有限个互不相交的可测子集且每个 $m(E_i)<\infty$. 容易看到,我们可进而取每个 $\alpha_i$ 为有理数,而(7.9)式仍成立. 由测度的定义,知对于每个 $E_i$,存在开矩体 $I_{i,j}(j=1,2,\cdots)$,使 $E_i\subset\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}I_{i,j}$ 且有

$$m(E_i)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}|I_{i,j}|<m(E_i)+\varepsilon. \tag{7.10}$$

取 $n_i$ 足够大,以至于 $G_i=\bigcup\limits_{j=1}^{n_i}I_{i,j}$满足

$$m(\bigcup_{j=1}^{\infty}I_{i,j}\setminus G_i)<\varepsilon. \tag{7.11}$$

注意:$G_i\Delta E_i=(G_i\setminus E_i)\cup(E_i\setminus G_i)\subset(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}I_{i,j}\setminus E_i)\cup(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}I_{i,j}\setminus G_i)$,并结合(7.10)和(7.11)式,我们有

$$m(G_i\Delta E_i)\leqslant m(\bigcup_{j=1}^{\infty}I_{i,j}\setminus E_i)+m(\bigcup_{j=1}^{\infty}I_{i,j}\setminus G_i)<2\varepsilon. \tag{7.12}$$

再取端点坐标为有理数的开矩体 $I'_{i,j}(j=1,2,\cdots n_i)$,使 $m(I_{i,j}\Delta I'_{i,j})$足够小,以至于

$$m(G_i\Delta G'_i)<\varepsilon, \tag{7.13}$$

这里,$G'_i=\bigcup\limits_{j=1}^{n_i}I'_{i,j}$. 由 $E_i\Delta G'_i\subset(E_i\Delta G_i)\cup(G_i\Delta G'_i)$及(7.12)、(7.13)式,知 $m(E_i\Delta G'_i)\leqslant m(E_i\Delta G_i)+m(G_i\Delta G'_i)<2\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon$. 作简单可测函数 $\Psi(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{G'_i}(x)$. 我们有

$$\|\varphi-\Psi\|_p\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|\,\|\chi_{E_i}-\chi_{G'_i}\|_p\leqslant(\max\nolimits_{1\leqslant i\leqslant n}|\alpha_i|)\sum_{i=1}^{n}\|\chi_{E_i}-\chi_{G'_i}\|_p$$

$$=(\max\nolimits_{1\leqslant i\leqslant n}|\alpha_i|)\sum_{i=1}^{n}(m(E_i\Delta G'_i))^{\frac{1}{p}}<(\max\nolimits_{1\leqslant i\leqslant n}|\alpha_i|)n(3\varepsilon)^{\frac{1}{p}}. \tag{7.14}$$

由(7.9)和(7.14)式知 $f$ 可被形如 $\Psi$ 的函数按 $\|\ \|_p$ 范数逼近. 令 $Q$ 为$L^p(E)$中如下形式的函数 $\Psi$ 所成的集合:$\Psi(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{G'_i}(x)$. 这里,$n$ 为自然数,每个 $\alpha_i$

取有理数，而每个 $G'_i$ 为有限个端点坐标为有理数的开矩体之并. 显然，$Q$ 为 $L^p(E)$ 中可数集. 又，任意 $f\in L^p(E)$ 可被 $Q$ 中的元素逼近，即 $Q$ 稠于 $L^p(E)$. 这样就证明了：$L^p(E)$ 为可分的.

**注 7.5**　应当指出，只要可测集 $E\subset\mathbf{R}^n$ 使 $m(E)>0$，我们就有 $L^\infty(E)$ 不可分. 这里，$L^\infty(E)$ 被赋予如下距离 $\rho$：$\forall f,g\in L^\infty(E)$，$\rho(f,g)=\|f-g\|_\infty$. 下面的例子就以较为简单的情况，即 $E=[a,b]\subset\mathbf{R}^1$ 的情况来证明这一点.

**例 7.3.1**　设 $-\infty<a<b<\infty$，则 $L^\infty[a,b]$ 不可分.

**证**　设 $A\subset L^\infty[a,b]$ 是由如下的函数 $f_s(x)$ 所组成：当 $a\leqslant x\leqslant s$ 时，$f_s(x)=1$；当 $s<x\leqslant b$ 时，$f_s(x)=0$. 显然，对于任意 $s,s'\in[a,b)$，只要 $s\neq s'$，就有

$$\rho(f_s,f_{s'})=\|f_s-f_{s'}\|_\infty=1. \tag{7.15}$$

若 $L^\infty[a,b]$ 具有一个可数稠子集 $D$. 以 $D$ 中每个点为中心，以 $\frac{1}{3}$ 为半径作开球. 这种开球共计为可数个 $\left\{B\left(f,\frac{1}{3}\right):f\in D\right\}$，这里，$B\left(f,\frac{1}{3}\right)=\left\{g\in L^\infty[a,b]:\|g-f\|_\infty<\frac{1}{3}\right\}$.

由 $D$ 稠于 $L^\infty[a,b]$，知 $\bigcup\limits_{f\in D}B\left(f,\frac{1}{3}\right)=L^\infty[a,b]$. 当然有 $\bigcup\limits_{f\in D}B\left(f,\frac{1}{3}\right)\supset A$. 今上式左端为可数个开球之并，而右端 $A$ 的势为 $\chi$，故必有 $A$ 中两个不同的元素 $f_s$，$f_{s'}(s\neq s')$ 位于同一个开球 $B\left(f,\frac{1}{3}\right)$ 内. 如此，

$$\rho(f_s,f_{s'})\leqslant\rho(f_s,f)+\rho(f,f_{s'})<\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

此矛盾于(7.15)式. 故 $L^\infty[a,b]$ 是不可分的.

## 7.4　例题选讲

**例 7.4.1**　设 $f\in L^3(E)$. 证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{m(E_n)}<\infty$，这里，$E_n=\{x\in E:|f(x)|\geqslant n\}$.

**证**　因 $f\in L^3(E)$，故可设 $L:=\int_E|f|^3\mathrm{d}x$ 且 $L<\infty$. 如此，

$$L=\int_E|f|^3\mathrm{d}x\geqslant\int_{E_n}|f|^3\mathrm{d}x\geqslant n^3\cdot m(E_n).$$

由此

$$m(E_n)\leqslant\frac{L}{n^3}\quad 因而\sqrt{m(E_n)}\leqslant\frac{\sqrt{L}}{n^{3/2}}.$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{L}}{n^{3/2}}<\infty,$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{m(E_n)}<\infty.$$

**例 7.4.2** 设 $p,q,r$ 为满足$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$的三个正数. 则对于 $E$ 上的任何可测函数 $f,g,h$,有$\int_E|fgh|\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_E|f|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E|g|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_E|h|^r\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}}$.

**证** 令$\frac{1}{p'}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$,则$\frac{1}{p'}+\frac{1}{r}=1$且$\frac{p'}{p}+\frac{p'}{q}=1$. 两次应用 Holder 不等式,可得:$\int_E|fgh|\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_E|fg|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_E|h|^r\right)^{\frac{1}{r}}$及$\int_E|fg|^{p'}\mathrm{d}x=\int_E|f|^{p'}|g|^{p'}\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_E(|f|^{p'})^{\frac{p}{p'}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p'}{p}}\left(\int_E(|g|^{p'})^{\frac{q}{p'}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p'}{q}}=\left(\int_E|f|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{p'}{p}}\left(\int_E|g|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{p'}{q}}$.

综合上述两式,有$\int_E|fgh|\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_E|f|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E|g|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_E|h|^r\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}}$.

一般地,可证明下述结果:设 $n$ 个正数 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 满足$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_n}=1$,$f_1,f_2,\cdots,f_n$ 为 $E$ 上的 $n$ 个可测函数,则有$\int_E|f_1f_2\cdots f_n|\,\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_E|f_1|^{p_1}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p_1}}\left(\int_E|f_2|^{p_2}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p_2}}\cdots\left(\int_E|f_n|^{p_n}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p_n}}$.

**例 7.4.3** 设 $0<m(E)<\infty$,$1\leqslant p<q$,则如例 7.1.3,我们知道 $L^q(E)\subset L^p(E)$. 事实上,可以证明:对于 $L^q(E)$中的点列$\{f_n\}$,按范数$\|\ \|_q$的收敛蕴涵按范数$\|\ \|_p$的收敛.

**证** 令 $p'=\frac{q}{p}$,则 $p'>1$. 令 $q'=\frac{q}{q-p}$,则易验证 $q'>0$,且$\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}=1$. 对于函数 $1,|f|^p$ 和共轭指数 $p',q'$应用 Holder 不等式,我们有

$$\int_E|f|^p\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_E1^{q'}\mathrm{d}x\right)^{1/q'}\left(\int_E(|f|^p)^{p'}\mathrm{d}x\right)^{1/p'}=(m(E))^{(q-p)/q}\left(\int_E|f|^q\mathrm{d}x\right)^{p/q}.$$

上式两端取 $1/p$ 次方，则有 $\left(\int_E |f|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant (m(E))^{(q-p)/(pq)}\left(\int_E |f|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q}$，显然这就是 $\|f\|_p \leqslant \|f\|_q (m(E))^{1/p-1/q}$. 由此易知：$\|f_n - f\|_q \to 0 (n\to\infty)$ 蕴涵 $\|f_n - f\|_p \to 0 (n\to\infty)$.

**例 7.4.4** 设 $0<m(E)<\infty, f\in L^\infty(E)$. 显然对于任意 $p>0, f\in L^p(E)$. 证明：$\lim\limits_{p\to\infty}\|f\|_p = \|f\|_\infty$.

**证** 不妨假设 $\|f\|_\infty>0$（倘不然，结论是显然的）. 由范数 $\|\cdot\|_\infty$ 的定义，知存在零测集 $S$，使对于任意 $x\in E\backslash S$，有 $|f(x)|\leqslant \|f\|_\infty$.

因而 $\int_E |f|^p \mathrm{d}x = \int_{E\backslash S}|f|^p\mathrm{d}x \leqslant \|f\|_\infty^p m(E)$.

即 $\left(\int_E |f|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|f\|_\infty (m(E))^{\frac{1}{p}}$. 由于 $(m(E))^{\frac{1}{p}} \to 1 (p\to\infty)$，故 $\overline{\lim\limits_{p\to\infty}}\|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty$. 另一方面，任取 $0<\varepsilon<\|f\|_\infty$，则 $E_\varepsilon = \{x\in E: |f(x)| \geqslant \|f\|_\infty - \varepsilon\}$ 不可能为零测集，故 $\lim\limits_{p\to\infty}(m(E_\varepsilon))^{\frac{1}{p}} = 1$. 又 $\|f\|_p \geqslant \left(\int_{E_\varepsilon}|f|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant (\|f\|_\infty - \varepsilon)(m(E_\varepsilon))^{\frac{1}{p}}$. 令 $p\to\infty$，则有 $\underline{\lim\limits_{p\to\infty}}\|f\|_p \geqslant \|f\|_\infty - \varepsilon$. 因 $\varepsilon>0$ 可任意小，故 $\underline{\lim\limits_{p\to\infty}}\|f\|_p \geqslant \|f\|_\infty$.

**例 7.4.5** 设 $1\leqslant p\leqslant\infty$，$L^p(E)$ 中的点列 $\{f_n\}$ 按 $\|\ \|_p$-范数收敛于 $f$，即 $\|f_n - f\|_p \to 0 (n\to\infty)$. 则 $\{f_n\}$ 必按测度收敛于 $f$，从而由定理 4.3.3 知 $\{f_n\}$ 具有子序列 $\{f_{n_i}\}$ 几乎处处收敛于 $f$.

**证** 当 $p=\infty$ 时，容易证明：存在 $E$ 的零测子集 $F$，使 $\{f_n\}$ 在 $E\backslash F$ 上一致收敛于 $f$. 由此易知：对于任意 $\delta>0$，$m(|f_n - f|\geqslant\delta) \to 0 (n\to\infty)$，即 $\{f_n\}$ 按测度收敛于 $f$. 这里，以 $(|f_n - f|)$ 表示集合 $\{x\in E: |f_n(x) - f(x)|\geqslant\delta\}$，以下类似. 当 $1\leqslant p<\infty$ 时，对于任意 $\delta>0$，有 $\delta^p m(|f_n - f|\geqslant\delta) \leqslant \int_{(|f_n-f|\geqslant\delta)} |f_n - f|^p \mathrm{d}x \leqslant (\|f_n - f\|_p)^p \to 0 (n\to\infty)$.

由此可见，$\{f_n\}$ 按测度收敛于 $f$.

**例 7.4.6** 证明：$\{f_n\}$ 按 $\|\ \|_p$-范数收敛不蕴涵几乎处处收敛.

**证** 如例 4.3.2 在 $E=[0,1]$ 上作函数列 $\{f_n\}$ 并令 $f=0$，则 $\int_E |f_n - f|^p \mathrm{d}x = m(E_i^{(k)}) = \dfrac{1}{k} \to 0 (n\to\infty)$. 但如我们已见到的，$\{f_n\}$ 处处不收敛于 $f$.

**例 7.4.7** 证明：$\{f_n\}$ 几乎处处收敛不蕴涵按 $\|\ \|_p$-范数收敛.

**证** 令 $E=[0,1]$. 作定义于 $E$ 上的函数序列 $\{f_n\}$ 如下: $f_n(x)=n^2$, 当 $x\in\left(0,\frac{1}{n}\right)$时; $f_n(x)=0$, 当 $x\in[0,1]\setminus\left(0,\frac{1}{n}\right)$时. 令 $f(x)\equiv 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$, $\forall x\in E$. 设 $1\leqslant p<\infty$, 则有 $\|f_n-f\|_p=\left(\int_E|f_n-f|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}=n^{2-\frac{1}{p}}\to\infty(n\to\infty)$. 即按 $L^p(E)$中的范数 $\|\ \|_p$, $\{f_n\}$不收敛于 $f$.

**例 7.4.8** 设 $f\in L^1(E)$. 证明: 对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $E$ 的可测子集 $A$ 使 $m(A)<\infty$ 且 $\int_{E\setminus A}|f|\mathrm{d}x<\varepsilon$.

**证** 令

$$E_0=\{x\in E:|f(x)|>0\}\text{及 }E_n=\left\{x\in E:|f(x)|>\frac{1}{n}\right\}.$$

显然, 在 $E_0$ 上处处有

$$|f|\chi_{E_n}\to|f|(n\to\infty),$$

这里$\chi_{E_n}$是 $E_n$ 的特征函数. 又 $|f|\chi_{E_n}\leqslant|f|$ 且 $f\in L^1(E)$. 由控制收敛定理(见定理 5.4.1)知

$$\int_{E_n}|f|\mathrm{d}x=\int_{E_0}|f|\chi_{E_n}\mathrm{d}x\to\int_{E_0}|f|\mathrm{d}x=\int_E|f|\mathrm{d}x<\infty\quad(n\to\infty).$$

故对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $n_0$ 使

$$0\leqslant\int_E|f|\mathrm{d}x-\int_{E_n}|f|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

令 $E_{n_0}=A$. 则 $m(A)=m(E_{n_0})<\infty$ 且

$$\int_{E\setminus A}|f|\mathrm{d}x=\int_E|f|\mathrm{d}x-\int_A|f|\mathrm{d}x=\int_E|f|\mathrm{d}x-\int_{E_{n_0}}|f|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

**例 7.4.9** 设 $f$ 及每个 $f_n$ 都属于 $L^1(E)$. $\{f_n\}$几乎处处收敛于 $f$ 且 $\|f_n\|_1\to\|f\|_1(n\to\infty)$; 则

(1) 对于 $E$ 的任意可测子集 $S$, 有 $\int_S|f_n|\mathrm{d}x\to\int_S|f|\mathrm{d}x(n\to\infty)$;

(2) $\|f_n-f\|_1\to 0(n\to\infty)$.

**证** (1) 由 Fatou 引理, 有

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty}\int_S|f_n|\mathrm{d}x&\geqslant\int_S|f|\mathrm{d}x=\int_E|f|\mathrm{d}x-\int_{E\setminus S}|f|\mathrm{d}x\\&\geqslant\int_E|f|\mathrm{d}x-\varliminf_{n\to\infty}\int_{E\setminus S}|f_n|\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\int_E |f_n| \mathrm{d}x - \int_{E\setminus S} |f_n| \mathrm{d}x\right)$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}}\int_S |f_n| \mathrm{d}x.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_S |f_n| \mathrm{d}x \to \int_S |f| \mathrm{d}x$.

(2) 由例 7.4.8 知,对于任意 $\varepsilon>0$,取 $E$ 的可测子集 $A$,使 $m(A)<\infty$ 且 $\int_{E\setminus A} |f| \mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{5}$. 由积分的绝对连续性,知存在 $\delta>0$,使当 $m(F)<\delta$ 时,有 $\int_F |f| \mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{5}$.

由 Egoroff 定理(见定理 4.2.1),知存在 $A$ 的可测子集 $B$,使 $m(A\setminus B)<\delta$ 且在 $B$ 上 $\{f_n\}$ 一致地收敛于 $f$. 择自然数 $n_0$,使当 $n\geqslant n_0$ 时,有 $\sup_{x\in B} |f_n(x)-f(x)| \cdot m(B)<\frac{\varepsilon}{5}$. 现在,应用(1),我们有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_E |f-f_n| \mathrm{d}x = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\int_{E\setminus A} |f-f_n| \mathrm{d}x+\int_{A\setminus B} |f-f_n| \mathrm{d}x+\int_B |f-f_n| \mathrm{d}x\right)$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\int_{E\setminus A} |f| \mathrm{d}x+\int_{E\setminus A} |f_n| \mathrm{d}x+\int_{A\setminus B} |f| \mathrm{d}x+\int_{A\setminus B} |f_n| \mathrm{d}x\right)+\frac{\varepsilon}{5}$$

$$= 2\int_{E\setminus A} |f| \mathrm{d}x+2\int_{A\setminus B} |f| \mathrm{d}x+\frac{\varepsilon}{5}<\frac{2\varepsilon}{5}+\frac{2\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}=\varepsilon.$$

由此可见,$\| f_n-f \|_1 \to 0\ (n\to\infty)$. 类似地可以证明:对于 $1\leqslant p<\infty$,若 $L^p(E)$ 中序列 $\{f_n\}$ 几乎处处收敛于 $f$ 且 $\| f_n \|_p \to \| f \|_p$,则 $\| f_n-f \|_p \to 0$.

**例 7.4.10** 设 $m(E)<\infty$,$\{f_n\}\subset L^p(E)\ (1\leqslant p<\infty)$ 且 $\{f_n\}$ 在 $E$ 上几乎处处收敛于 $f$. 若对于任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使当 $S\subset E$,$m(S)<\delta$ 时,对于一切 $n$,有 $\int_S |f_n|^p \mathrm{d}x<\varepsilon$,则 $f\in L^p(E)$ 且 $\| f-f_n \|_p \to 0\ (n\to\infty)$.

**证** 对于任意 $\varepsilon>0$,设 $\delta>0$ 如题设中所给. 由 Egorov 定理,知存在可测集 $B\subset E$,使 $m(B)<\delta$ 且 $\{f_n\}$ 在 $E\setminus B$ 上一致地收敛于 $f$. 由 Fatou 引理,有

$$\int_B |f|^p \mathrm{d}x \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\int_B |f_n|^p \mathrm{d}x \leqslant \varepsilon.$$

于是 $\int_E |f-f_n|^p \mathrm{d}x = \int_{E\setminus B} |f-f_n|^p \mathrm{d}x+\int_B |f-f_n|^p \mathrm{d}x$

$$\leqslant \int_{E\setminus B} |f-f_n|^p \mathrm{d}x + \left[\left(\int_B |f|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_B |f_n|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p$$

$$\leqslant \int_{E\setminus B} |f-f_n|^p \mathrm{d}x + (\varepsilon^{\frac{1}{p}} + \varepsilon^{\frac{1}{p}})^p$$

$$= \int_{E\setminus B} |f-f_n|^p \mathrm{d}x + 2^p \varepsilon .$$

又，$\{f_n\}$在 $E\setminus B$ 上一致地收敛于 $f$，故存在自然数 $n_0$，使当 $n\geqslant n_0$ 时，对于一切$x\in E\setminus B$，有$|(f-f_n)(x)|<\varepsilon^{\frac{1}{p}}$. 于是，当 $n\geqslant n_0$ 时，有$\int_{E\setminus B} |f-f_n|^p \mathrm{d}x \leqslant \varepsilon m(B\setminus C) \leqslant \varepsilon m(E)$. 故当 $n\geqslant n_0$ 时，有$\int_E |f-f_n|^p \mathrm{d}x \leqslant \varepsilon m(E) + 2^p\varepsilon$. 由此可知：$f-f_n\in L^p(E)$，因而 $f\in L^p(E)$且$\| f-f_n \|_p \to 0(n\to\infty)$.

# 习题七

1. 设 $f(x)$, $g(x)$ 是 $E$ 上的可测函数，且有 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$，$1\leqslant p<\infty$，试证明：

$$\| fg \|_r \leqslant \| f \|_p \| g \|_q.$$

2. 设 $\{f_k(x)\}$ 是 $E$ 上的可测函数列，$F\in L^p(E)(p\geqslant 1)$，若有

$|f_k(x)|\leqslant F(x)$, $a.e.$ $x\in E(k=1,2,\cdots)$，$\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$, $a.e.$，$x\in E$，

试证明：$\lim\limits_{k\to\infty}\| f_k-f \|_p=0$.

3. 设 $m(E)<\infty$，$f\in L^\infty(E)$，若 $\| f \|_\infty>0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\| f \|_{n+1}^{n+1}}{\| f \|_n^n}=\| f \|_\infty$.

4. 设 $1<p<\infty$，$f\in L^p((0.+\infty))$，$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，证明：$\| F \|_p\leqslant\frac{p}{p-1}$ $\| f \|_p$.

5. 设 $f\in L^2([0,1])$，令 $g(x)=\int_0^1\frac{f(t)}{|x-t|^{1/2}}\mathrm{d}t$，$0<x<1$，试证明：

$$\left(\int_0^1 g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\leqslant 2\sqrt{2}\left(\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

6. 设 $m(E)>0$，若存在 $M>0$，使得对任意的 $p>1$，均有 $\| f \|_p\leqslant M$，则 $f\in L^\infty(E)$.

7. 设 $f\in L^p(E)(p\geqslant 1)$，$e$ 是 $E$ 的可测子集，证明：

$$\left(\int_E |f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant\left(\int_e |f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}+\left(\int_{E\setminus e} |f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

8. 设 $g(x)$ 是 $E$ 上的可测函数，若对任意的 $f\in L^2(E)$，有 $\| fg \|_2\leqslant M\| f \|_2$，证明：$|g(x)|\leqslant M$, $a.e.$ $x\in E$.

[General Information]
□□=□□□□ □2□
□□=□□□□□□□□
□□=155
SS□=13588938
DX□=
□□□□=2014.07
□□□=□□□□□□□